

УДК 517.598

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ЩЕЛЯХ МЕЖДУ ПЛАСТИНАМИ

Д.Н. Тумаков, А.Р. Тухватова

Аннотация

В работе исследована задача дифракции плоской TE -поляризованной электромагнитной волны на щелях между металлическими пластинами, расположенными в одной плоскости. Задача дифракции сформулирована в виде краевой задачи для уравнения Гельмгольца с граничными условиями «на металле» и заданным асимптотическим поведением на ребрах экранов. Решения ищутся в классе уходящих на бесконечность волн. Исследуемая задача сведена к интегральному уравнению с сильной особенностью в ядре относительно следа вектора электрической напряженности на щели. В свою очередь, интегральное уравнение сведено к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения производной искомой функции. Аналитически вычислены сингулярные интегралы, содержащие обобщенные полиномы Чебышева.

Ключевые слова: дифракция, TE -поляризованная электромагнитная волна, гиперсингулярное интегральное уравнение, обобщенные полиномы Чебышева.

Введение

В работе исследована задача дифракции плоской TE -поляризованной электромагнитной волны на щелях в бесконечной металлической пластине. Эта задача, а также задача дифракции на металлических конечных экранах представляют большой теоретический и практический интерес, и им посвящено немало работ (см., например, [1–5] и имеющуюся там библиографию).

Задача дифракции сформулирована в виде краевой задачи для уравнения Гельмгольца с граничными условиями «на металле» и заданным асимптотическим поведением на ребрах экранов [6]. Решения задачи ищутся в классе уходящих на бесконечность волн [7].

Уравнение Гельмгольца рассмотрено отдельно в верхней и нижней полуплоскостях [8], разделенных осью x . Образы Фурье следов на границах каждой из областей нормальных производных и самой искомой функции связаны соотношениями, полученными в [9]. Эти соотношения использованы при анализе исходной задачи.

Исследуемая задача сведена к интегральному уравнению с сильной особенностью в ядре относительно следа вектора электрической напряженности на щели. Из интегрального уравнения получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений.

1. Постановка задачи

Пусть в плоскости $z = 0$ декартовой системы координат размещена идеально проводящая бесконечная вдоль оси x и бесконечная вдоль оси y тонкая пластина со щелями (количество щелей конечно и равно J). Сверху (из области $z > 0$) набегают плоская электромагнитная волна вида $u_0(x, z) = A_0 \exp(ik \sin \theta x + ik \cos \theta z)$, где θ – угол, отсчитываемый от оси z . Нужно найти электромагнитное поле,

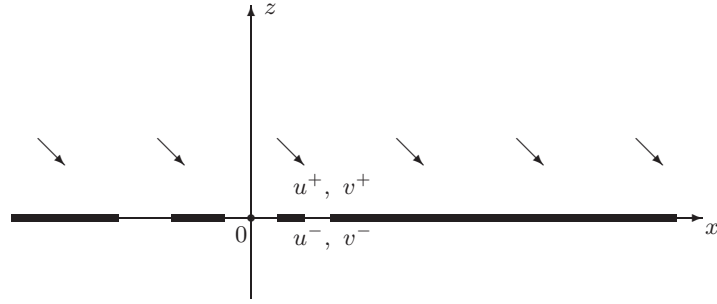


Рис. 1. Геометрия задачи

возникающее при дифракции волны. Ограничимся случаем, когда вектор $\mathbf{E}$ падающей волны параллелен оси y (TE -поляризация поля). Поэтому можно искать решение задачи дифракции, не зависящее от координаты y .

Ненулевые компоненты электромагнитного поля в случае TE -поляризации выражаются [8] через потенциальную функцию $u(x, z) = E_y(x, z)$, которая является решением двумерного уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0. \quad (1)$$

Рассматриваемая задача может быть сформулирована как задача сопряжения для этого уравнения. Плоскость xOz разобьем на две области (см. рис. 1): верхнюю $\{(x, z) : z > 0\}$ и нижнюю $\{(x, z) : z < 0\}$ полуплоскости.

Границу сопряжения полуплоскостей разобьем на части: обозначим через M часть оси x , соответствующую металлическим пластинам, и через N – часть без металлических пластин.

Обозначим через $u^+(x)$ предельные значения искомой функции $E_y(x, z)$ при стремлении z к 0 сверху, а через $v^+(x)$ – предельные значения $H_x(x, z)$ (или, как следует из системы Максвелла, нормальной производной $\partial E_y(x, z)/\partial z$ с точностью до постоянного множителя). Для предельных значений функции и нормальной производной при подходе к оси x из нижней полуплоскости введем обозначения $u^-(x)$ и $v^-(x)$.

В каждой из полуплоскостей нужно найти решения уравнения (1) из класса распределений медленного роста на бесконечности, удовлетворяющие при $z = 0$ следующим условиям. Вне металлических пластин касательные составляющие векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ непрерывны. В нашем случае эти условия имеют вид

$$u^+(x) + u_0(x, 0) = u^-(x), \quad v^+(x) + v_0(x, 0) = v^-(x) \quad \text{при } x \in N, \quad (2)$$

где $v_0(x, 0) = \partial u_0(x, z)/\partial z|_{z=0}$. Касательные составляющие напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ на идеально проводящих металлических пластинах должны быть равны нулю:

$$u^+(x) = -u_0(x, 0), \quad u^-(x) = 0 \quad \text{при } x \in M. \quad (3)$$

Потребуем также, чтобы на ребрах экранов (см. (1.25) и (1.26) [6]) были выполнены условия

$$E_y = O(\rho^{1/2}), \quad H_x = O(\rho^{-1/2}), \quad \rho \rightarrow 0,$$

где ρ – расстояние до концевой точки экрана.

Условия на бесконечности определим следующим образом [7]: функция $u(x, z)$ ограничена на бесконечности или распространяется как волна (порождает волну, переносящую энергию) при $x^2 + z^2 \rightarrow \infty$.

Задача (1)–(3) вместе с условиями на бесконечности и ребре представляет собой математическую модель процесса дифракции на бесконечной металлической пластине с щелями TE -поляризованной электромагнитной волны, описываемой функцией $u_0(x, z)$.

2. Сведение задачи дифракции к интегральному уравнению

Образы Фурье нормальных производных и самой искомой функции на границах полуплоскостей связаны соотношениями (см. [9]):

$$V^+(\zeta) - i\gamma(\zeta)U^+(\zeta) = 0, \quad V^-(\zeta) + i\gamma(\zeta)U^-(\zeta) = 0, \quad (4)$$

где

$$\gamma(\zeta) = \begin{cases} -\sqrt{k^2 - \zeta^2}, & |\zeta| < k, \\ i\sqrt{\zeta^2 - k^2}, & |\zeta| > k \end{cases}.$$

Соотношения (4) для вещественных ζ фактически заменяют собой уравнение (1). Таким образом, переходим от системы (1)–(3) к системе (2)–(4), которую и будем в дальнейшем решать.

При решении задач дифракции достаточно отыскать граничные значения либо самой функции, либо нормальной производной [8]. Рассмотрим в качестве неизвестной граничное значение функции $u^-(x)$. Сведем задачу (2)–(4) к системе интегральных уравнений относительно $u^-(x)$.

Применив к соотношениям (4) обратное преобразование Фурье и воспользовавшись условием (3), получим

$$\begin{aligned} v^+(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u^+(\tau) K_0(\tau - x) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_N u^+(\tau) K_0(\tau - x) d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_M u_0(\tau) K_0(\tau - x) d\tau \end{aligned} \quad (5)$$

и

$$v^-(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u^-(\tau) K_0(\tau - x) d\tau = -\frac{1}{2\pi} \int_N u^-(\tau) K_0(\tau - x) d\tau, \quad (6)$$

где

$$K_0(x) = -\frac{ik}{2|x|} H_1^{(2)}(k|x|). \quad (7)$$

Рассмотрим уравнения (5) и (6) на $x \in N$. Вычтем одно из другого и используем условия (2):

$$-v_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_N u^-(\tau) K_0(\tau - x) d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\tau) K_0(\tau - x) d\tau.$$

Здесь и далее у следов $u_0(x, 0)$ и $v_0(x, 0)$ будем опускать значение 2-й переменной, обозначая их через $u_0(x)$ и $v_0(x)$ соответственно.

Для падающей волны, как для волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси z , справедливо второе соотношение (4), которое можно записать в виде

$$v_0(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\tau) K_0(\tau - x) d\tau.$$

Тогда получим

$$\int_N u^-(\tau) K_0(\tau - x) d\tau = -2\pi v_0(x), \quad x \in N. \quad (8)$$

Заметим, что в работе [10] при несколько отличных от (2) условиях получено интегральное уравнение относительно $u^+(\tau)$ при той же правой части.

3. Преобразование интегрального уравнения

Пусть интервалы, на которых расположены щели, совпадают с отрезками (α_j, β_j) , $j = 1, \dots, J$. Будем считать, что отрезки упорядочены и $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \alpha_J < \beta_J$. Обозначим $u(\tau) = u^-(\tau)$ и $f(x) = -2\pi v_0(x)$, где $x \in N = \bigcup_{j=1}^J (\alpha_j, \beta_j)$. Тогда уравнение (8) примет вид

$$\sum_{j=1}^J \int_{\alpha_j}^{\beta_j} u_j(\tau) K_0(\tau - x) d\tau = f(x), \quad x \in \bigcup_{j=1}^J (\alpha_j, \beta_j) \quad (9)$$

с граничными условиями $u(\alpha_j) = u(\beta_j) = 0$ в соответствии с поведением поля на ребрах.

Исследуем поведение функции Ханкеля в окрестности нуля. Для этого выразим данную функцию через функции Бесселя и Неймана: $H_1^{(2)}(x) = J_1(x) - iY_1(x)$. Разложим в ряд Тейлора при $x \rightarrow 0$ справа функции Бесселя

$$J_1(x) = \frac{x}{2} + O(x^3)$$

и Неймана

$$Y_1(x) = -\frac{2}{\pi x} + \frac{(-1 + 2\gamma - 2\ln 2 + 2\ln x)x}{2\pi} + O(x^3),$$

где $\gamma = 0.57722$ – постоянная Эйлера.

С учетом этих представлений получим

$$\begin{aligned} K_0(x) &= -\frac{ik}{2|x|} (J_1(k|x|) - iY_1(k|x|)) = \\ &= \frac{1}{\pi x^2} - \frac{k^2}{2\pi} \ln|x| - \frac{(-1 + 2\gamma - 2\ln 2 + 2\ln k)k^2}{4\pi} - i\frac{k^2}{4} + O(|x|^2). \end{aligned}$$

Таким образом, в ядре интегрального уравнения (9) можно выделить слагаемые, содержащие особенность в нуле:

$$K_0(x) = \frac{1}{\pi x^2} + \frac{k^2}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} + R(x), \quad (10)$$

где

$$R(x) = -\frac{ik}{2|x|} (J_1(k|x|) - iY_1(k|x|)) - \frac{1}{\pi x^2} - \frac{k^2}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \quad (11)$$

представляет собой регулярную часть ядра $K_0(x)$. Функция $R(x)$ непрерывна на каждом из интервалов (α_j, β_j) и

$$R(0) = -\frac{(-1 + 2\gamma - 2\ln 2 + 2\ln k)k^2}{4\pi} - i\frac{k^2}{4}.$$

С учетом (10) интегральное уравнение (9) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_s}^{\beta_s} \frac{u_s(\tau)}{(\tau-x)^2} d\tau + \frac{k^2}{2\pi} \int_{\alpha_s}^{\beta_s} u_s(\tau) \ln \frac{1}{|\tau-x|} d\tau + \int_{\alpha_s}^{\beta_s} u_s(\tau) R(\tau-x) d\tau + \\ & + \sum_{j=1, j \neq s}^J \int_{\alpha_j}^{\beta_j} u_j(\tau) K_0(\tau-x) d\tau = f(x), \quad x \in (\alpha_s, \beta_s), \quad s = 1, \dots, J. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь в первые два интеграла вошли особенности ядра уравнения (9), третий содержит непрерывное ядро $R(\tau-x)$, а последний интеграл также будет без особенностей, так как в нем $\tau \neq x$. Заметим, что первый интеграл имеет особенность второго порядка и понимать его следует в смысле интеграла Адамара [11].

4. Некоторые свойства обобщенных полиномов Чебышева

Введем функцию

$$\rho_j(x) = \sqrt{(\beta_j - x)(x - \alpha_j)},$$

которая понадобится для дальнейших преобразований с обобщенными полиномами Чебышева $T_n^j(x)$ и $U_n^j(x)$, заданными на интервале $x \in (\alpha_j, \beta_j)$. Обобщенные полиномы Чебышева связаны с обычными полиномами Чебышева соотношениями

$$T_n^j(x) = T_n(x'), \quad U_n^j(x) = U_n(x'), \quad (13)$$

где

$$x' = \frac{2}{\beta_j - \alpha_j} x - \frac{\beta_j + \alpha_j}{\beta_j - \alpha_j}. \quad (14)$$

Докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Пусть функция $u_j(\tau) \in C^1(\alpha_j, \beta_j)$ при $\tau \in (\alpha_j, \beta_j)$ представима в виде ряда Фурье по обобщенным полиномам Чебышева второго рода:

$$u_j(\tau) = \rho_j(\tau) \sum_{n=0}^{\infty} D_n^j U_n^j(\tau), \quad (15)$$

а ее производная $u_j'(\tau)$ на том же интервале – в виде ряда по обобщенным полиномам Чебышева первого рода:

$$u_j'(\tau) = \frac{1}{\rho_j(\tau)} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^j T_n^j(\tau). \quad (16)$$

Тогда $C_0^j = 0$ и

$$C_{n+1}^j = -\frac{\beta_j - \alpha_j}{2} (n+1) D_n^j, \quad n = 0, 1, \dots$$

Доказательство. В рядах (15) и (16) сделаем замену (13) и перейдем от τ к τ' :

$$u_j(\tau') = \frac{\beta_j - \alpha_j}{2} \sqrt{1 - \tau'^2} \sum_{n=0}^{\infty} D_n^j U_n(\tau'), \quad (17)$$

$$u_j'(\tau') = \frac{2}{\beta_j - \alpha_j} \frac{1}{\sqrt{1 - \tau'^2}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^j T_n(\tau'). \quad (18)$$

Продифференцируем ряд (17) по τ' :

$$u'_j(\tau') = -\frac{\tau'}{\sqrt{1-\tau'^2}} \sum_{n=0}^{\infty} D_n^j U_n(\tau') + \sqrt{1-\tau'^2} \sum_{n=0}^{\infty} D_n^j U'_n(\tau').$$

Используя формулу (22.8.4) [13]: $(1-x^2)U'_n(x) = -nxU_n(x) + (n+1)U_{n-1}(x)$, получим

$$\begin{aligned} u'_j(\tau') &= -\frac{\tau'}{\sqrt{1-\tau'^2}} \sum_{n=0}^{\infty} D_n^j U_n(\tau') + \frac{\tau'}{\sqrt{1-\tau'^2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-n) D_n^j U_n(\tau') + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{1-\tau'^2}} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) D_n^j U_{n-1}(\tau') = -\frac{\tau'}{\sqrt{1-\tau'^2}} D_0^j U_0(\tau') - \\ &- \frac{\tau'}{\sqrt{1-\tau'^2}} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) D_n^j U_n(\tau') + \frac{1}{\sqrt{1-\tau'^2}} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) D_n^j U_{n-1}(\tau'). \end{aligned}$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся соотношениями, связывающими между собой полиномы Чебышева первого и второго рода (22.5.6) и (22.5.7) [13]:

$$T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x), \quad T_n(x) = xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x).$$

Получим

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\tau'^2} u'_j(\tau') &= -\tau' D_0^j U_0(\tau') - \tau' \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) D_n^j U_n(\tau') + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) D_n^j U_{n-1}(\tau') = -\sum_{n=1}^{\infty} n D_{n-1}^j T_n(\tau'). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$u'_j(\tau') = -\frac{1}{\sqrt{1-\tau'^2}} \sum_{n=1}^{\infty} n D_{n-1}^j T_n(\tau').$$

Приравняем полученное выражение и разложение производной (18):

$$-\frac{1}{\sqrt{1-\tau'^2}} \sum_{n=1}^{\infty} n D_{n-1}^j T_n(\tau') = \frac{2}{\beta_j - \alpha_j} \frac{1}{\sqrt{1-\tau'^2}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^j T_n(\tau').$$

Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Заметим, что для тригонометрических рядов Фурье также справедливо утверждение, подобное лемме 1 ([12, п. 704]).

Лемма 2. *Полиномы $T_n^j(x)$ являются собственными функциями интегрального оператора с логарифмическим ядром. При этом*

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \frac{1}{\rho_j(\tau)} T_n^j(\tau) \ln \frac{1}{|\tau-x|} d\tau = \begin{cases} \ln \frac{4}{\beta_j - \alpha_j} T_0^j(x), & n = 0, \\ \frac{1}{n} T_n^j(x), & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (19)$$

Доказательство. В интеграле (19) сделаем замену (14) по x и подобную замену для переменной интегрирования τ , перейдя к τ' . Тогда подынтегральные множители преобразуются следующим образом:

$$\frac{1}{\rho_j(\tau)} = \frac{2}{\beta_j - \alpha_j} \frac{1}{\sqrt{1 - \tau'^2}}, \quad \ln \frac{1}{|\tau - x|} = \ln \frac{2}{\beta_j - \alpha_j} + \ln \frac{1}{|\tau' - x'|}.$$

Искомый интеграл (19) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \tau'^2}} T_n(\tau') \left[\ln \frac{2}{\beta_j - \alpha_j} + \ln \frac{1}{|\tau' - x'|} \right] d\tau' = \\ = \begin{cases} \ln \frac{4}{\beta_j - \alpha_j} T_0(x'), & n = 0, \\ \frac{1}{n} T_n(x'), & n = 1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь использованы значения интегралов

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \tau^2}} T_n(\tau) \ln \frac{1}{|\tau - x|} d\tau = \begin{cases} \ln 2, & n = 0, \\ \frac{1}{n} T_n(x), & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

и свойство ортогональности полиномов Чебышева:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \tau^2}} T_n(\tau) d\tau = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Отсюда и из (13) следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 3. Пусть

$$L_n^j(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \rho_j(\tau) U_n^j(\tau) \ln \frac{1}{|\tau - x|} d\tau.$$

Тогда

$$L_0^j(x) = \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{4}{\beta_j - \alpha_j} \right) \frac{(\beta_j - \alpha_j)^2}{8} U_0^j(x) - \frac{(\beta_j - \alpha_j)^2}{32} U_2^j(x),$$

$$L_1^j(x) = \frac{(\beta_j - \alpha_j)^2}{12} U_1^j(x) - \frac{(\beta_j - \alpha_j)^2}{48} U_3^j(x),$$

$$\begin{aligned} L_n^j(x) = -\frac{(\beta_j - \alpha_j)^2}{16n} U_{n-2}^j(x) + \\ + \frac{(n+1)(\beta_j - \alpha_j)^2}{8n(n+2)} U_n^j(x) - \frac{(\beta_j - \alpha_j)^2}{16(n+2)} U_{n+2}^j(x), \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Доказательство. Перейдем от обобщенных полиномов Чебышева второго рода к полиномам Чебышева первого рода по формуле

$$U_{n-1}^j(x) = \frac{(\beta_j - \alpha_j)^2}{8} \frac{1}{\rho_j^2(x)} \left[T_{n-1}^j(x) - T_{n+1}^j(x) \right],$$

которая следует из равенства (22.5.10) [13]

$$U_{n-1}(x) = \frac{1}{1-x^2} [xT_n(x) - T_{n+1}(x)],$$

и рекуррентного соотношения $T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$.

Вернемся к полиномам Чебышева второго рода, воспользовавшись формулой

$$T_n^j(x) = \frac{U_n^j(x) - U_{n-2}^j(x)}{2},$$

которая следует из (22.5.8) [13].

При $n = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \rho_j(\tau) U_0^j(\tau) \ln \frac{1}{|\tau - x|} d\tau &= \\ &= \frac{(\beta_j - \alpha_j)^2}{8\pi} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \frac{1}{\rho_j(\tau)} [T_0^j(\tau) - T_2^j(\tau)] \ln \frac{1}{|\tau - x|} d\tau = \\ &= \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{4}{\beta_j - \alpha_j} \right) \frac{(\beta_j - \alpha_j)^2}{8} U_0^j(x) - \frac{(\beta_j - \alpha_j)^2}{32} U_2^j(x). \end{aligned}$$

Здесь $T_0^j(x) = U_0^j(x)$. Для случая $n = 1$, так как $2T_1^j(x) = U_1^j(x)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \rho_j(\tau) U_1^j(\tau) \ln \frac{1}{|\tau - x|} d\tau &= \\ &= \frac{(\beta_j - \alpha_j)^2}{8\pi} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \frac{1}{\rho_j(\tau)} [T_1^j(\tau) - T_3^j(\tau)] \ln \frac{1}{|\tau - x|} d\tau = \\ &= \frac{(\beta_j - \alpha_j)^2}{12} U_1^j(x) - \frac{(\beta_j - \alpha_j)^2}{48} U_3^j(x). \end{aligned}$$

При $n = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \rho_j(\tau) U_n^j(\tau) \ln \frac{1}{|\tau - x|} d\tau &= \\ &= \frac{(\beta_j - \alpha_j)^2}{8\pi} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \frac{1}{\rho_j(\tau)} [T_n^j(\tau) - T_{n+2}^j(\tau)] \ln \frac{1}{|\tau - x|} d\tau = \\ &= -\frac{(\beta_j - \alpha_j)^2}{16n} U_{n-2}^j(x) + \frac{(n+1)(\beta_j - \alpha_j)^2}{8n(n+2)} U_n^j(x) - \frac{(\beta_j - \alpha_j)^2}{16(n+2)} U_{n+2}^j(x). \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 4. Для $x \in (\alpha_j, \beta_j)$

$$\frac{1}{\pi} Vp \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \frac{T_n^j(\tau)}{\rho_j(\tau)(\tau - x)} d\tau = \begin{cases} \frac{i \operatorname{sign} x}{\rho_j(x)} U_0^j(x), & n = 0, \\ \frac{2}{\beta_j - \alpha_j} U_{n-1}^j(x), & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

(интеграл понимается в смысле главного значения по Коши).

Доказательство. При $n = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} V_p \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \frac{1}{\rho_j(\tau)(\tau - x)} d\tau &= \frac{2}{(\beta_j - \alpha_j)\pi} V_p \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \tau'^2}(\tau' - x')} d\tau' = \\ &= \frac{2}{\beta_j - \alpha_j} \frac{i \operatorname{sign} x'}{\sqrt{1 - x'^2}} = \frac{i \operatorname{sign} x}{\rho_j(x)}. \end{aligned}$$

В остальных случаях, когда $n \neq 0$, используем формулу, полученную из (22.13.3) [13]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} V_p \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \frac{T_n^j(\tau)}{\rho_j(\tau)(\tau - x)} d\tau &= \frac{2}{(\beta_j - \alpha_j)\pi} V_p \int_{-1}^1 \frac{T_n(\tau')}{\sqrt{1 - \tau'^2}(\tau' - x')} d\tau' = \\ &= \frac{2}{\beta_j - \alpha_j} U_{n-1}(x') = \frac{2}{\beta_j - \alpha_j} U_{n-1}^j(x). \end{aligned}$$

□

Доказанные леммы являются обобщением ряда утверждений, приведенных в [14].

5. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим интегральное уравнение более общего вида, чем уравнение (12) (вместо $k^2/2$ запишем постоянную B).

Теорема 1. *Гиперсингулярное интегральное уравнение относительно функций $u(x) = \{u_j(x) \in C^1(\alpha_j, \beta_j)\}_{j=1}^J$*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_s}^{\beta_s} \frac{u_s(\tau)}{(\tau - x)^2} d\tau + \frac{B}{\pi} \int_{\alpha_s}^{\beta_s} u_s(\tau) \ln \frac{1}{|\tau - x|} d\tau + \int_{\alpha_s}^{\beta_s} u_s(\tau) R(\tau - x) d\tau + \\ + \sum_{j=1, j \neq s}^J \int_{\alpha_j}^{\beta_j} u_j(\tau) K_0(\tau - x) d\tau = f(x), \quad x \in (\alpha_s, \beta_s), \quad s = 1, \dots, J \end{aligned} \quad (20)$$

с заданным поведением на границах отрезков

$$\lim_{x \rightarrow \alpha_j + 0} u_j(x) = O(\sqrt{x - \alpha_j}), \quad \lim_{x \rightarrow \beta_j - 0} u_j(x) = O(\sqrt{\beta_j - x}) \quad (21)$$

сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов C_n^j разложения функций $u_j'(\tau)$ в ряды Фурье по обобщенным полиномам Чебышева второго рода

$$\begin{aligned} \frac{\pi(\beta_s - \alpha_s)}{4} C_k^s - \frac{\pi(\beta_s - \alpha_s)^3 B}{32} C_1^s \left[\left(\frac{1}{4} + \ln \frac{4}{\beta_s - \alpha_s} \right) \delta_{k-1}^0 - \frac{1}{4} \delta_{k-1}^2 \right] - \\ - \frac{\pi(\beta_s - \alpha_s)^3 B}{96} C_2^s \left[\delta_{k-1}^1 - \frac{1}{4} \delta_{k-1}^3 \right] + \\ + \frac{\pi(\beta_s - \alpha_s)^3 B}{32} \left[\frac{1}{2(k+1)(k+2)} C_{k+2}^s - \frac{1}{(k-1)(k+1)} C_k^s + \frac{1}{2(k-3)(k-1)} C_{k-2}^s \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2}{\beta_s - \alpha_s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{n+1}^s}{n+1} \int_{\alpha_s}^{\beta_s} \rho_s(x) U_{k-1}^s(x) \int_{\alpha_s}^{\beta_s} \rho_s(\tau) U_n^s(\tau) R(\tau - x) d\tau dx - \\
& - \sum_{j=1, j \neq s}^J \frac{2}{\beta_j - \alpha_j} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{n+1}^j}{n+1} \int_{\alpha_s}^{\beta_s} \rho_s(x) U_{k-1}^s(x) \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \rho_j(\tau) U_n^j(\tau) K_0(\tau - x) d\tau dx = \\
& = \int_{\alpha_s}^{\beta_s} \rho_s(x) f(x) U_{k-1}^s(x) dx, \quad s = 1, \dots, J, \quad k = 1, 2, \dots \quad (22)
\end{aligned}$$

Доказательство. Действительно, поведение производной искомой функции на границе определяют формулы

$$\lim_{x \rightarrow \alpha_j + 0} u'_j(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x - \alpha_j}}\right), \quad \lim_{x \rightarrow \beta_j - 0} u'_j(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\beta_j - x}}\right).$$

Поэтому $u'_j(x)$ удобно искать в виде ряда по полиномам Чебышева первого рода (16).

Рассмотрим первое слагаемое уравнения (20). Проинтегрируем его по частям:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_s}^{\beta_s} \frac{u_s(\tau)}{(\tau - x)^2} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_s}^{\beta_s} \frac{u'_s(\tau)}{\tau - x} d\tau.$$

Подставив представление для $u'_s(\tau)$ в виде ряда (16) в полученный интеграл и воспользовавшись леммой 4, получим

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_s}^{\beta_s} \frac{1}{\rho_s(\tau)} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^s T_n^s(\tau) \frac{1}{\tau - x} d\tau &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n^s \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_s}^{\beta_s} \frac{T_n^s(\tau)}{\rho_s(\tau)(\tau - x)} d\tau = \\
&= C_0^s \frac{i \operatorname{sign} x}{\rho_s(\tau)} + \frac{2}{\beta_s - \alpha_s} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^s U_{n-1}^s(x).
\end{aligned}$$

Следовательно, по лемме 1

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_s}^{\beta_s} \frac{u_s(\tau)}{(\tau - x)^2} d\tau = \frac{2}{\beta_s - \alpha_s} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^s U_{n-1}^s(x).$$

Неизвестную функцию $u(x)$ будем искать в виде ряда по полиномам Чебышева второго рода (15). Тогда второе слагаемое интегрального уравнения (20) примет вид

$$\begin{aligned}
\frac{B}{\pi} \int_{\alpha_s}^{\beta_s} u_s(\tau) \ln \frac{1}{|\tau - x|} d\tau &= B \sum_{n=0}^{\infty} D_n^s \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_s}^{\beta_s} \rho_s(\tau) U_n^s(\tau) \ln \frac{1}{|\tau - x|} d\tau = \\
&= -\frac{(\beta_s - \alpha_s)B}{4} C_1^s \left[\left(\frac{1}{4} + \ln \frac{4}{\beta_s - \alpha_s} \right) U_0^s(x) - \frac{1}{4} U_2^s(x) \right] - \\
&\quad - \frac{(\beta_s - \alpha_s)B}{12} C_2^s \left[U_1^s(x) - \frac{1}{4} U_3^s(x) \right] + \\
&\quad + \frac{(\beta_s - \alpha_s)B}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_{n+1}^s}{n+1} \left[\frac{1}{2n} U_{n-2}^s(x) - \frac{(n+1)}{n(n+2)} U_n^s(x) + \frac{1}{2(n+2)} U_{n+2}^s(x) \right].
\end{aligned}$$

Как и полиномы Чебышева второго рода $U_n(x)$ (22.2.5) [13], обобщенные полиномы $U_n^s(x)$ ортогональны с весом $\rho_s(\tau)$ на отрезке (α_s, β_s) :

$$\int_{\alpha_s}^{\beta_s} \rho_s(\tau) U_k^s(\tau) U_n^s(\tau) d\tau = \frac{(\beta_s - \alpha_s)^2}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \tau^2} U_k(\tau) U_n(\tau) d\tau = \frac{\pi(\beta_s - \alpha_s)^2}{8} \delta_k^n.$$

Таким образом, левая часть интегрального уравнения (20) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\beta_s - \alpha_s} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^s U_{n-1}^s(x) - \frac{(\beta_s - \alpha_s)B}{4} C_1^s \left[\left(\frac{1}{4} + \ln \frac{4}{\beta_s - \alpha_s} \right) U_0^s(x) - \frac{1}{4} U_2^s(x) \right] - \\ & - \frac{(\beta_s - \alpha_s)B}{12} C_2^s \left[U_1^s(x) - \frac{1}{4} U_3^s(x) \right] + \\ & + \frac{(\beta_s - \alpha_s)B}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_{n+1}^s}{n+1} \left[\frac{1}{2n} U_{n-2}^s(x) - \frac{(n+1)}{n(n+2)} U_n^s(x) + \frac{1}{2(n+2)} U_{n+2}^s(x) \right] - \\ & - \frac{2}{\beta_s - \alpha_s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{n+1}^s}{n+1} \int_{\alpha_s}^{\beta_s} \rho_s(\tau) U_n^s(\tau) R(\tau - x) d\tau - \\ & - \sum_{j=1, j \neq s}^J \frac{2}{\beta_j - \alpha_j} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{n+1}^j}{n+1} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \rho_j(\tau) U_n^j(\tau) K_0(\tau - x) d\tau. \quad (23) \end{aligned}$$

Умножим обе части интегрального уравнения на $\rho_s(x) U_{k-1}^s(x)$ при $k = 1, 2, \dots$, $s = 1, \dots, J$ и проинтегрируем по интервалу (α_s, β_s) . Получим уравнения (22). $\square$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 09-01-97009).

Summary

D.N. Tumakov, A.R. Tukhvatova. Diffraction of an Electromagnetic Wave in the Gaps between Plates.

In the article, the problem of diffraction of a plane TE -polarized electromagnetic wave in the gaps between metal plates located in one plane is investigated. The diffraction problem is formulated in the form of a boundary-value problem for the Helmholtz equation with the "on metal" boundary conditions and a given asymptotic behavior on the edges of the screens. The solutions are searched for in the class of the waves propagating to infinity. The problem under consideration is reduced to an integral equation with a strong singularity of the kernel with respect to the trace of the electric field vector in the gap. The integral equation, in its turn, is reduced to an infinite system of linear algebraic equations with respect to the derived function expansion coefficients. Some singular integrals containing generalized Chebyshev polynoms are analytically calculated.

Key words: diffraction, TE -polarized electromagnetic wave, hypersingular integral equation, generalized Chebyshev polynoms.

Литература

1. Репин В.М. Дифракция электромагнитных волн на прямоугольном отверстии в экране // Вычислительные методы и программирование. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975. – Вып. XXIV. – С. 50–68.

2. *Butler M.C., Umashankar K.R.* Electromagnetic Excitation of a Wire through an Aperture-Perforated Conducting Screen // IEEE Trans. Antennas Propagat. – 1976. – V. AP-24, No 4. – P. 456–462.
3. *Butler M.C., Rahmat-Samii Y., Mittra R.* Electromagnetic Penetration through Apertures in Conducting Surfaces // IEEE Trans. Antennas Propagat. – 1978. – V. AP-26, No 1. – P. 82–93.
4. *Шанин А.В.* К задаче о дифракции на щели. Некоторые свойства ряда Шварцшильда // Зап. науч. семинаров ПОМИ. – 2001. – Т. 275. – С.258–285.
5. *Тумаков Д.Н., Тухватова А.Р.* Дифракция электромагнитной волны на щели между полубесконечными пластинами // Труды Рос. летней шк. «Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики» и Рос. семинара «Нелинейные поля и релятивистская статистика в теории гравитации и космологии». – Казань: Фолиантъ, 2010. – С.95–104.
6. *Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г.* Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах (Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции). – М.: ИПРЖР, 1996. – 176 с.
7. *Плецинский И.Н., Плецинский Н.Б.* Интегральные уравнения задачи сопряжения полукрытых диэлектрических волноводов // Изв. вузов. Матем. – 2007. – № 5. – С. 63–80.
8. *Плецинский Н.Б., Тумаков Д.Н.* Метод частных областей для скалярных координатных задач дифракции электромагнитных волн в классах обобщенных функций. – Препринт ПМФ-2000-01. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2000. – 50 с.
9. *Плецинский Н.Б.* Уравнение Гельмгольца в полуплоскости и скалярные задачи дифракции электромагнитных волн на плоских металлических экранах. – Препринт ПМФ-03-02. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2003. – 34 с.
10. *Плецинский Н.Б.* Модели и методы волновой электродинамики. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2008. – 105 с.
11. *Бойков И.В., Добрынина Н.Ф.* Приближенные методы вычисления интегралов Адамара. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2007. – 108 с.
12. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. 3. – 662 с.
13. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
14. *Лифанов И.К.* Особые интегральные уравнения и методы их численного решения. – М.: МАКС-Пресс, 2006. – 68 с.

Поступила в редакцию
20.10.11

Тумаков Дмитрий Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: dtumakov@ksu.ru

Тухватова Алсу Равиловна – студент Института вычислительной математики и информационных технологий Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: alsu-tuhvatova@yandex.ru