УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Том 153, кн. 4 Физико-математические науки *2011*

УДК 519.68

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ ДЛЯ СМЕШАННЫХ СХЕМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А.П. Гогин, М.М. Карчевский

Аннотация

Предлагается итерационный метод с седловым предобуславливателем для решения системы нелинейных уравнений, возникающей при аппроксимации квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка при помощи смешанной схемы конечных элементов типа Равьяра – Тома. Указываются способы выбора итерационного параметра, обеспечивающие сходимость метода. Приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: квазилинейное эллиптическое уравнение второго порядка, смешанный метод конечных элементов, итерационный метод, седловая матрица, исследование сходимости.

Введение

Настоящая работа посвящена построению и исследованию итерационного метода численной реализации смешанной схемы конечных элементов типа Равьяра – Тома для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка дивергентного вида. Реализация предлагаемого метода сводится к решению на каждом шаге системы линейных уравнений с седловой матрицей. Показано, что при выполнении условий сильной монотонности и липшиц-непрерывности для оператора исходной задачи метод сходится со скоростью геометрической прогрессии.

Аналогичный, но двухступенчатый, итерационный метод для более общих эллиптических уравнений изучался в [1]. Предлагаемый в настоящей работе метод решения системы проще в реализации и, как показывают численные эксперименты, сходится существенно быстрее.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка дивергентного вида

$$-\operatorname{div} a(x,\nabla u) = f(x), \quad x\in\Omega, \tag{1}$$

$$u(x) = 0, \quad x\in\partial\Omega. \tag{2}$$

$\Omega\subset R^2$ – ограниченная многоугольная область, Γ – граница области Ω. Здесь $a(x,\xi) = (a_1(x,\xi),\ a_2(x,\xi))$, $\xi\in R^2$ для всех $x\in\Omega$.

Предполагаются выполненными условия

$$(a(x,\xi)-a(x,\eta))\cdot(\xi-\eta)\ge c_0|\xi-\eta|^2 \quad \forall\xi,\eta\in R^2, \quad x\in\Omega, \tag{3}$$

$$|a_i(x,\xi)-a_i(x,\eta)|\le c_1|\xi-\eta| \quad \forall\,\xi,\eta\in R^2, \quad x\in\Omega, \quad i=1,2, \tag{4}$$

$c_0,\ c_1$ – положительные постоянные.

Хорошо известно, что при выполнении этих условий задача (1), (2) имеет единственное обобщенное решение из пространства Соболева $H_0^1(\Omega)$.

2. Смешанная схема конечных элементов

Через $\mathcal{T}_h$ будем обозначать регулярную (см., например, [3]) триангуляцию области of Ω.

Пусть далее

$$RT_k(K) = (P_k(K))^2 \oplus x P_k(K), \quad x = (x_1, x_2).$$

есть пространство Равьяра – Тома (см. [4]). Поясним, что каждый элемент v из $RT_k(K)$ – вектор-функция вида

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 + p_3 x_1 \\ p_2 + p_3 x_2 \end{bmatrix},$$

где $p_i \in P_k(K)$, $i = 1, 2, 3$, $P_k(K)$ – пространство полиномов степени не выше k по совокупности переменных.

Определим, следуя [4], конечноэлементные пространства

$$\begin{aligned} &N_h = \left\{ q_h \in H_2; q\big|_K \in RT_k(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \right\}, \\ &M_h = \left\{ v_h \in L_2(\Omega); v_h\big|_K \in P_k(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \right\}, \\ &X_h = M_h \times N_h. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь (см., например, [5])

$$H_2 = H_2(\operatorname{div}, \Omega) = \left\{ j \in (L_2(\Omega))^2 \mid \operatorname{div} j \in L_2(\Omega) \right\}.$$

Отметим, что принадлежность q_h пространству H_2 обеспечивает непрерывность нормальных компонент вектор-функции q_h при переходе через общую границу двух любых соседних элементов триангуляции $\mathcal{T}_h$.

Под приближенным решением задачи (1), (2) будем понимать пару функций $(u_h, j_h) \in X_h$ таких, что

$$-\int\limits_\Omega \operatorname{div} j_h v_h \, dx = \int\limits_\Omega f(x) v_h(x) \, dx, \tag{6}$$

$$\int\limits_\Omega a^{-1}(x,\ j_h) \cdot q_h \, dx + \int\limits_\Omega u_h \operatorname{div} q_h \, dx = 0 \quad \forall (v_h, q_h) \in X_h. \tag{7}$$

Здесь $a^{-1}(x, \cdot) : R^2 \to R^2$ – функция, обратная к $a(x, \cdot) : R^2 \to R^2$, существование функции a^{-1} очевидным образом следует из условий (3), (4). Отметим также, что для функции $a^{-1}(x, \cdot)$ выполнены неравенства

$$\left(a^{-1}(x,\xi) - a^{-1}(x,\eta)\right) \cdot (\xi - \eta) \ge c_3 |\xi - \eta|^2 \quad \forall \xi, \eta \in R^2, \quad x \in \Omega, \tag{8}$$

$$|a^{-1}(x,\xi) - a^{-1}(x,\eta)| \le c_4 |\xi - \eta| \quad \forall\, \xi, \eta \in R^2, \quad x \in \Omega, \quad i = 1, 2. \tag{9}$$

c_3, c_4 – положительные постоянные.

Исследование разрешимости дискретной задачи (6), (7) и оценки точности приближенного решения выполнены в работе [2]. В частности, в [2] показано, что если u, обобщенное решение задачи (1), (2), таково, что ∇u, $\operatorname{div} \nabla u \in H^1(\Omega)$, то $\|u - u_h\|_{L_2(\Omega)} + \|j - j_h\|_{L_2(\Omega)} + \|\operatorname{div}(j - j_h)\|_{L_2(\Omega)} \le ch$, где c – положительная постоянная, не зависящая от параметра триангуляции h.

3. Итерационный метод. Исследование сходимости

Для построения и исследования итерационного метода решения задачи (6), (7) удобно ввести в рассмотрение конечномерный нелинейный оператор L_h, квадратную матрицу M_h, прямоугольную матрицу C_h и вектор f_h, определяемые следующими соотношениями[1]:

$$L_h(j_h) \cdot q_h = \int\limits_\Omega a^{-1}(x, j_h) \cdot q_h \, dx \quad \forall j_h, \, q_h \in N_n,$$

$$B_h j_h \cdot q_h = \int\limits_\Omega j_h \cdot q_h \, dx \quad \forall j_h, \, q_h \in N_n,$$

$$C_h v_h \cdot q_h = \int\limits_\Omega v_h \operatorname{div} q_h \, dx \quad \forall v_h \in M_h, \quad q_h \in N_n.$$

$$f_h \cdot v_h = \int\limits_\Omega f v_h \, dx \quad \forall \, v_h \in M_h.$$

Задача (6), (7) может быть теперь записана в виде

$$\begin{pmatrix} L_h & C_h \\ -C_h^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_h \\ u_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_h \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Отметим используемые в дальнейшем свойства матриц B_h, C_h и оператора L_h. Матрица B_h, очевидно, симметрична и положительно определена. Пусть $(j_h, q_h)_{B_h} = B_h j_h \cdot q_h$ – энергетическое скалярное произведение, соответствующее матрице B_h. Как известно (см. [6, 7]), для любого $p > 1$

$$\sup_{q_h \in N_h} \frac{\int\limits_\Omega v_h \operatorname{div} q_h \, dx}{\|q_h\|_{L_p(\Omega)}} \geq c \, \|v_h\|_{L_p(\Omega)} \quad \forall v_h \in M_h, \quad c = \text{const} > 0. \tag{11}$$

Поэтому

$$\sup_{q_h \in N_h} \frac{C_h v_h \cdot q_h}{\|q_h\|_{B_h}} \geq c \, \|v_h\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall v_h \in M_h, \quad c = \text{const} > 0, \tag{12}$$

следовательно, симметричная матрица $D_h = C_h^T B_h^{-1} C_h$ положительно определена. Из неравенств (8), (9), очевидно, вытекает, что

$$(L_h(j_h) - L_h(q_h)) \cdot (j_h - q_h) \geq c_5 \, \|j_h - q_h\|_{B_h}^2, \tag{13}$$

$$\|L_h(j_h) - L_h(q_h)\|_{B_h^{-1}} \leq c_6 \, \|j_h - q_h\|_{B_h} \tag{14}$$

для любых j_h, q_h из N_h, то есть оператор L_h сильно монотонен и липшиц-непрерывен относительно энергетической нормы матрицы B_h.

Для решения системы нелинейных уравнений (10) используем итерационный процесс

$$\begin{pmatrix} \tau^{-1} B_h & C_h \\ -C_h^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_h^{k+1} - j_h^k \\ u_h^{k+1} - u_h^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_h & C_h \\ -C_h^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_h^k \\ u_h^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_h \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{15}$$

j_h^0, u_h^0 заданы, $\tau > 0$ – итерационный параметр.

[1] Как обычно, мы используем одинаковые обозначения для функций из пространств M_h, N_h и векторов их узловых параметров.

Каждый шаг итерационного метода (15) сводится к решению системы линейных уравнений с матрицей
$$\mathcal{B}_h = \begin{pmatrix} \tau^{-1}B_h & C_h \\ -C_h^T & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$
Вследствие невырожденности матрицы D_h матрица $\mathcal{B}_h$ – седловая невырожденная матрица. Для решения систем с такими матрицами хорошо известны эффективные прямые и итерационные методы (см., например, [8–12]).

Сформулируем и докажем общую теорему о сходимости итерационных процессов вида (15). Из этой теоремы, в частности, следует сходимость изучаемого в настоящей работе итерационного метода.

Теорема 1. *Пусть матрицы B_h, $D_h = C_h^T B_h^{-1} C_h$ положительно определены, оператор L_h удовлетворяет условиям* (13), (14),
$$0 < \tau < 2c_6/c_5^2. \tag{17}$$
Тогда итерационный процесс (15) *сходится при любом начальном приближении j_h^0, u_h^0.*

Доказательство. Пусть $z_{h,u}^k = u_h^k - u_h$, $z_{h,j}^k = j_h^k - j_h$ – погрешность на k-м шаге итерационного процесса (15). Из (10), (15) непосредственно следует, что для любого $k \geq 0$
$$B_h z_{h,j}^{k+1} = B_h z_{h,j}^k - \tau(L_h(j_h^k) - L_h(j_h)) - \tau C_h z_{h,u}^{k+1}, \tag{18}$$
$$C_h^T z_{h,j}^{k+1} = 0. \tag{19}$$
Умножим обе части (18) скалярно на $z_{h,j}^{k+1}$. Используя (19), получим, что
$$B_h z_{h,j}^{k+1} \cdot z_{h,j}^{k+1} = (B_h z_{h,j}^k - \tau(L_h(j_h^k) - L_h(j_h))) \cdot z_{h,j}^{k+1}, \tag{20}$$
откуда, очевидно, вытекает неравенство
$$\|z_{h,j}^{k+1}\|_{B_h} \leq \|B_h z_{h,j}^k - \tau(L_h(j_h^k) - L_h(j_h))\|_{B_h^{-1}}. \tag{21}$$
Вследствие условий (13), (14)
$$\|B_h z_{h,j}^k - \tau(L_h(j_h^k) - L_h(j_h))\|_{B_h^{-1}} \leq q(\tau)\|z_{h,j}^k\|_{B_h}, \tag{22}$$
где $q(\tau) = (1 - 2\tau c_5 + \tau^2 c_6^2)^{1/2}$ (см. теоремы 3 [13, с. 106], а также [14, гл. 13, § 1]).

Таким образом,
$$\|z_{h,j}^{k+1}\|_{B_h} \leq q(\tau)\|z_{h,j}^k\|_{B_h}, \quad k = 0, 1 \ldots \tag{23}$$
Далее, из (18) с учетом того, что уравнение (19) выполнено при всех $k = 0, 1, \ldots,$ получаем, что
$$C_h^T B_h^{-1} C_h z_{h,u}^{k+1} = -C_h^T B_h^{-1}(L_h(j_h^k) - L_h(j_h)),$$
следовательно,
$$C_h^T B_h^{-1} C_h z_{h,u}^{k+1} \cdot z_{h,u}^{k+1} = -B_h^{-1}(L_h(j_h^k) - L_h(j_h)) \cdot C_h z_{h,u}^{k+1},$$
поэтому (см. (14))
$$\|z_{h,u}^{k+1}\|_{D_h} \leq \|L_h(j_h^k) - L_h(j_h\|_{B_h^{-1}} \leq c_1\,\|z_{h,j}^k\|_{B_h} \quad k = 0, 1, \ldots \tag{24}$$
Очевидно, что $0 < q(\tau) < 1$ при выполнении условия (17). Вместе с оценками (23), (24) это обеспечивает сходимость последовательностей $\|z_{h,j}^k\|_{B_h}$, $\|z_{h,u}^k\|_{D_h}$ к нулю. □

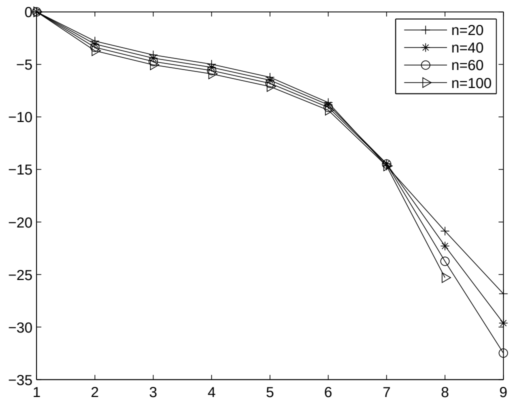

Рис. 1. Погрешность итерационного метода

Замечание. Если дополнительно к условиям теоремы 1 предположить, что оператор L_h дифференцируем по Гато и его производная симметрична (применительно к задаче (1), (2) это требование означает, что функция $a(x,\xi)$ дифференцируема по второму аргументу), то оценка (22), а следовательно, и оценка скорости сходимости итерационного метода (15) могут быть улучшены (подробнее см. [13, с. 107]).

В качестве иллюстрации приведем результаты решения задачи (1), (2) при $a(x,\xi) = ((1+|\xi|^2)/(1+2|\xi|^2))\xi$. Данная функция удовлетворяет условиям (3), (4). Поэтому задача (6), (7) при любой правой части f имеет единственное решение. В расчетах полагалось $f \equiv 0$. Ясно, что в этом случае точное решение задачи (6), (7) есть $u_h \equiv 0$, $j_h \equiv 0$. Область Ω – единичный квадрат. Начальное приближение выбиралось случайным образом. Параметр τ определялся из условия минимума функции $q(\tau)$. Линейная система алгебраических уравнений с матрицей (16) на каждом шаге итерационного процесса решалась стандартным методом треугольной факторизации с выбором главных элементов. Учитывалась разреженность матрицы (16). Итерации продолжались до выполнения условия $\|z_h^k\| \le \varepsilon \|z_h^0\|$. Здесь $\|z_h^k\| = \|z_{h,u}^k\|_{D_h} + \|z_{h,j}^k\|_{B_h}$, $\varepsilon = 10^{-5}$. На рис. 1 по оси абсцисс – номер итерации, по оси ординат – $\ln(\|z_h^k\|/\|z_h^0\|)$, n – количество разбиений стороны квадрата Ω при построении триангуляции, состоящей из равнобедренных прямоугольных треугольников. Видно, что скорость сходимости метода практически не зависит от параметра триангуляции (числа узлов конечноэлементной сетки).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 09-01-00814, 11-01-00667).

Summary

A.P. Gogin, M.M. Karchevsky. An Iterative Method for Mixed Finite Element Schemes.

This article proposes and investigates an iterative method with a saddle preconditioner for solving a system of nonlinear equations that arises in the approximation of a quasilinear second-order elliptic equation with a mixed scheme of finite elements of Raviart – Thomas type. The ways of choosing iteration parameters to ensure convergence of the method are indicated. The results of numerical experiments are presented.

Key words: second-order quasilinear elliptic equation, mixed finite element method, iterative method, saddle matrix, convergence investigation.

Литература

1. *Karchevsky M.M., Fedotov A.E.* Error estimates and iterative procedure for mixed finite element solution of second-order quasi-linear elliptic problems // Comput. Meth. Appl. Math. – 2004. – V. 4, No 4. – P. 445–463.

2. *Карчевский М.М., Федотов А.Е.* Об одном варианте смешанного метода конечных элементов для квазилинейных эллиптических уравнений // Исслед. по прикл. матем. и информатике. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2003. – Вып. 24. – С. 74–80.

3. *Съярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512 с.

4. *Brezzi F., Fortin M.* Mixed and Hybrid Finite Element Methods. – N. Y.: Springer-Verlag, 1991. – 362 p.

5. *Temam R.* Navier – Stokes Equation. Theory and Numerical Analysis. – Amsterdam; N. Y.; Oxford: North-Holland Publ. Comp., 1979. – 504 p.

6. *Farhloul M.* A mixed finite element method for a nonlinear Dirichlet problem // IMA. J. Num. Anal. – 1998. – V. 18, No 1. – P. 121–132.

7. *Farhloul M., Manouzi H.* On a mixed finite element method for the p-Laplacian // Can. Appl. Math. Quart. – 2000. – V. 8, No 1. – P. 67–78.

8. *Масловская Л.В.* Обобщенный алгоритм Холесского для смешанных дискретных аналогов эллиптических краевых задач // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1989. – Т. 29, № 1. – С. 67–74.

9. *Масловская Л.В.* Об условиях применимости обобщенного алгоритма Холесского // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. – Т. 32, № 3. – С. 339–347.

10. *Икрамов Х.Д.* Несколько замечаний по поводу обобщенного алгоритма Холесского // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. – Т. 32, № 7. – С. 1126–1130.

11. *Дьяконов Е.Г.* Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач. – М.: Наука, 1989. – 272 с.

12. *Быченков Ю.В., Чижонков Е.В.* Итерационные методы решения седловых задач. – М: Бином. Лаборатория знаний, 2010. – 349 с.

13. *Карчевский М.М., Ляшко А.Д.* Разностные схемы для нелинейных уравнений математической физики. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1976. – 156 с.

14. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 591 с.

Поступила в редакцию
20.10.11

Гогин Алексей Павлович – аспирант кафедры вычислительной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.

Карчевский Михаил Миронович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Mikhail.Karchevsky@ksu.ru*