

УДК 532.5.296:534.12

## УДАРНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ КАВИТАЦИОННОГО ПУЗЫРЬКА НА УПРУГОЕ ТЕЛО

*А.А. Аганин, М.А. Ильгамов, В.Г. Малахов,  
Т.Ф. Халитова, Н.А. Хисматуллина*

### Аннотация

Изучается осесимметричное силовое воздействие на упругое тело высокоскоростной струи, образующейся на поверхности пузырька в процессе его схлопывания вблизи поверхности тела. Струя направлена ортогонально плоской поверхности тела. Тело моделируется изотропным упругим полупространством, струя – цилиндрическим столбом жидкости. Волны в жидкости описываются по модели линейной акустики, волны в полупространстве – по модели линейно-упругого тела. Рассмотрены случаи непосредственного контакта пузырька с телом и случай, когда между телом и пузырьком имеется прослойка жидкости. За начальный момент времени принимается момент касания струи поверхности тела или прослойки. Приведены результаты расчетов ударного воздействия водяной струи на стальное тело при различных толщинах прослойки жидкости.

**Ключевые слова:** кавитационное разрушение, динамика несферического пузырька, схлопывание пузырька у стенки, взаимодействие пузырька со стенкой.

### Введение

Исследование силового воздействия кавитационных пузырьков на тело и связанного с ним явления кавитационного разрушения было начато еще в начале XX века в связи с быстрым износом гребных винтов водяных двигателей. Пример разрушительного воздействия кавитации иллюстрирует приведенная на рис. 1 фотография вращающейся детали насоса, прокачивающего жидкость [1]. Особенно сильные разрушения видны на краях лопастей в зонах наиболее интенсивной кавитации.

Для понимания природы кавитационного разрушения необходимо знать особенности воздействия отдельного пузырька на тело. Этому вопросу посвящено много работ. Однако режим ударного воздействия отдельных пузырьков, при котором в финальной стадии сжатия пузырька в жидкости возникают ударные волны, остается неизученным. Растущие возможности экспериментального оборудования (например, скорости видеосъемки) и вычислительной техники (в частности, ее быстродействия) позволяют приступить к детальному исследованию указанного режима.

К настоящему времени выделяют два основных механизма кавитационного разрушения: Рэлея и Корнфельда–Суворова. В 1917 г. Рэлей показал [2], что в ходе схлопывания пустой сферической полости (пустого пузырька) в несжимаемой жидкости радиальное распределение давления жидкости  $p(r, t)$  имеет вид

$$p(r, t) = p_0 \left[ 1 + \frac{R_m^3}{3R^2 r} \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \right],$$



Рис. 1. Фотография детали насоса, прокачивающего жидкость [1]

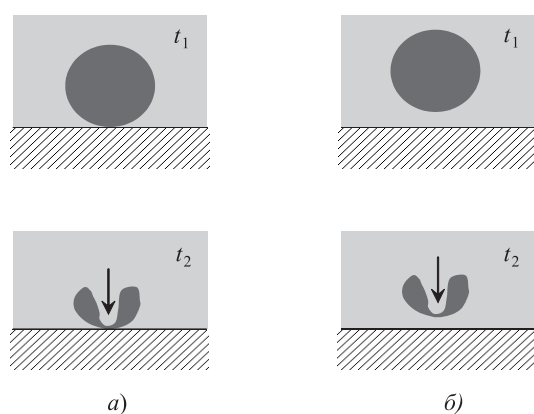


Рис. 2. Схлопывание пузырька у стенки с образованием на его поверхности высокоскоростной струи в случае контакта пузырька со стенкой (а) и при наличии между ними небольшой прослойки жидкости (б). Момент  $t_1$  – начало схлопывания, момент  $t_2$  – касание струей стенки (а) и прослойки жидкости (б). Стрелка указывает направление движения струи

где  $r$  – радиальная координата, отсчитываемая от центра пузырька,  $t$  – время,  $R = R(t)$  – текущий радиус пузырька,  $R_m$  – начальный радиус пузырька,  $p_0$  – статическое давление жидкости. Согласно этому распределению при  $r = 4^{1/3}R$ , то есть на расстоянии от поверхности пузырька около  $1.59R$ , в профиле давления жидкости  $p(r, t)$  имеется максимум. В процессе схлопывания пузырька величина этого максимума возрастает как  $(R_m/R)^3$ . В начале сферического схлопывания реального кавитационного пузырька влияние пара в нем несущественно, поэтому, как и в случае пустой полости, давление жидкости около пузырька может достигать очень больших значений. Если пузырек схлопывается подобным образом вблизи поверхности тела, то поверхность тела испытывает значительное силовое воздействие. Такой механизм воздействия обычно и называют механизмом Рэлей.

В 1944 г. Корнфельд и Суворов [3] в результате анализа накопленных к тому времени экспериментальных данных пришли к заключению, что схлопывание пузырька около стенки происходит не чисто сферически, как предполагал Рэлей, а с большими деформациями его поверхности. Ими было выдвинуто предположение, что при схлопывании пузырька вблизи стенки на его поверхности возникает высокоскоростная струйка. На рис. 2 показаны осевые сечения пузырька



Рис. 3. Фотография пузырька, схлопывающегося у стенки с образованием на его поверхности высокоскоростной струи [6]

в два момента времени (в начале ( $t_1$ ) и в конце ( $t_2$ ) процесса) для двух случаев несферического схлопывания ( $a$ ,  $b$ ). В первом случае пузырек касается стенки, а во втором между ними имеется прослойка жидкости. В конце схлопывания образованные на поверхности пузырьков струйки могут оказывать сильное воздействие на стенку (по направлению стрелки) либо непосредственно (рис. 2,  $a$ ), либо через слой жидкости (рис. 2,  $b$ ), что и вызывает микроразрушения. Струйный механизм кавитационного разрушения был подтвержден сначала теоретически [4], а затем и экспериментально [5]. Было установлено, что скорость струи имеет порядок сотен метров в секунду.

По мере углубления исследований и развития экспериментального оборудования были получены более наглядные свидетельства реализации струйного механизма кавитационного разрушения. Примером тому служит приведенная на рис. 3 фотография [6]. На ней хорошо видна струя, «прошивающая» полость пузырька.

### 1. Методы расчета динамики пузырька у стенки

К настоящему времени выполнено большое количество исследований динамики пузырьков у стенки. Если несферичность пузырьков мала, то задачу его взаимодействия со стенкой можно описать системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка относительно радиуса пузырька, положения его центра и амплитуды отклонений его формы от сферической в виде поверхностных сферических гармоник [7–9].

Для изучения динамики пузырьков с большими деформациями их поверхностей чаще используется подход, в котором на каждом шаге по времени скорость поверхности пузырька находится из граничного интегрального уравнения (ГИУ). Решение ГИУ вычисляется методом граничных элементов (МГЭ). При этом жидкость обычно предполагается невязкой несжимаемой, ее движение – безвихревым.

В частности, подобный подход предложен в работах [10, 11]. Их авторами обнаружена сильная чувствительность параметров струи к начальной деформации пузыря. С ростом начальной деформации скорость струйки резко возрастает. В работе [12] используется МГЭ для изучения роста и коллапса паровых полостей около твердой границы с учетом выталкивающей силы. Показано, что миграция коллапсирующего пузырька и струя на его поверхности могут быть направлены как к стенке, так и от нее. В работе [13] рассматривается осесимметричная задача коллапса полости в невязкой несжимаемой жидкости с переменным давлением, которое рассчитывается по двухфазной модели. В [14] исследуется коллапс пузырька у твердой стенки с образованием и перемещением тороидального пузырька. В [15] теоретически и экспериментально (с помощью высокоскоростной камеры) изучается движение двух кавитационных пузырьков возле твердой

границы. В экспериментах наблюдается образование вытянутых пузырьков, струй, направленных к стенке и от нее, расщепление пузырька. В [16] разработан МГЭ для расчета двумерной и трехмерной динамики пузырьков, образующихся при подводных взрывах в объеме жидкости и около ее границ. В работе [17] дается сравнение разных вариантов МГЭ для изучения движения двумерных пузырьков в неограниченной жидкости, а в [18] исследуется динамика пузырька у твердой стенки в поле переменного давления совместным применением уравнений в частных производных, решаемых МГЭ, и обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Обнаружено, что период и амплитуда колебаний пузырька связаны не только с изменением давления жидкости, но и с положением пузырька относительно стенки.

В работе [19] изучается начальное движение всплывающих пузырьков. Рассмотрено влияние поверхностного натяжения, относительного начального положения и объема. Формирование струи при коллапсе полости, ее направление и воздействие на близлежащие твердые стенки исследуются в [20]. Приводятся примеры расчета двумерных и трехмерных задач. Показано, что выталкивающая сила может вызывать формирование струи, направленной параллельно вертикальной твердой стенке. Коллапс кавитационного пузырька около стенки с развитием струи и образованием тороидального пузырька изучается в [21]. После образования тороидального пузырька давление на стенке может быть на порядок больше, чем при ударе струи.

В [22] исследуется динамика пузырька около наклонной стенки. В методику расчета внесен ряд модификаций. Если  $h \geq 3R$  ( $h$ ,  $R$  – начальные расстояние до стенки и радиус пузырька), то струя близка к осесимметричной, а направления движения струи и центра пузырька почти совпадают. Если  $h \approx 2R$ , то струя осесимметрична и направлена вверх. Если  $h \leq R$ , а выталкивающая сила и сила притяжения Бьеркнесса сравнимы, то струя направлена вверх. В работе [23] предложен трехмерный вариант МГЭ с устраненными особенностями. В контексте динамики пузырька изучается выбор параметров десингуляризации, что определяет эффективность данного метода.

Взаимодействие пузырька с жесткой конструкцией исследуется в [24]. В этой работе представлены результаты расчетов типичных осесимметричных задач. Динамика пузырька возле осциллирующей поверхности, удар струй и разрушение поверхностей, взаимодействие пузырьков, пузырьковые кластеры и поведение пузырьков около неровной поверхности рассмотрены в [25]. В работе [26] авторы моделируют взаимодействие пузырька со стенкой при разных радиусах пузырька, расстояниях до стенки, положениях стенки. В работе [27] финальная стадия коллапса кавитационного пузырька вблизи твердой границы, произведенного лазером, изучена с помощью МГЭ и экспериментально. Эволюция струи, испускание ударной волны и эффект «всплеска» исследуются здесь с помощью высокоскоростной видеосъемки с разрешением до 5 млн. кадров в секунду, а методом ГЭ рассчитываются изолинии давления, поле скорости жидкости и формы пузырька. В работе [28] рассмотрено влияние поверхностного натяжения на поведение чисто паровой полости или полости, содержащей некоторое неконденсируемое включение. Считается, что полость растет и коллапсирует осесимметрично возле твердой стенки. Рассматриваются различные значения расстояния до стенки, выталкивающей силы и поверхностного натяжения. Влияние поверхностного натяжения на динамику двух изначально сферических полостей, растущих и коллапсирующих осесимметрично около твердой стенки, изучается в [29]. Варьируются размеры полостей, расстояния между ними и стенкой, число Вебера  $We$ . Обнаружено, что если нижняя полость намного меньше верхней, а  $We > 20$ , то поверхностное натяжение существенно для

динамики нижней полости. Трехмерная динамика парогазового пузырька в жидкости, область которой полагается неограниченной, и взаимодействие пузырька с наклонной стенкой исследуются в [30]. Изучаются направление и скорость струи. Для оценки эффекта эрозии стенки применяется коэффициент проникновения струи. Формирование тороидального пузырька в конечной стадии коллапса полости в окрестности твердой границы исследуется в [31]. Дальнейшая эволюция тороидального пузырька рассматривается с учетом потерь энергии. Представлен пример расчета наблюдаемой в экспериментах обратной струи.

Различные вариации МГЭ применялись для описания роста и коллапса пузырька возле твердой стенки, свободной поверхности или другого пузырька в работах [32–36].

Следует отметить, что ГИУ для задач динамики пузырьков у стенки представляют собой интегральные уравнения Фредгольма первого рода, имеющие сингулярные ядра (в осесимметричном случае эти ядра включают полные эллиптические интегралы с логарифмической особенностью). Для их вычисления необходимо применять специальные квадратурные формулы [37].

Наряду с МГЭ для описания динамики пузырьков у стенок применяется также ряд других методов. В частности, в [38] исследовано несимметричное схлопывание пустого пузырька у стенки модифицированным методом маркеров и ячеек (МАС) [39]. В [40] разработан конечно-разностный метод решения задач динамики пузырька в терминах потенциала скорости. Этот метод экономичнее, чем метод МАС, за счет учета потенциальности движения жидкости. Вязкость и сжимаемость жидкости не учитываются. Коллапс изначально сферического парового пузырька у стенки с применением метода [40] рассмотрен в [4]. Несимметричное схлопывание пустого пузырька у стенки модифицированным методом МАС исследовано в [41]. Эффекты вязкости жидкости учтены не только внутри области, занимаемой жидкостью, но и на поверхности стенки. В окрестности границы пузырька они считаются пренебрежимо малыми. Для описания ранней стадии коллапса пузырька в [42] применен приближенный подход с использованием ГИУ. В нем применяется распределение источников и производных (например, дублетов), целиком содержащихся в пределах пузырька и расположенных вдоль оси симметрии. Такой метод экономичнее конечно-разностного метода, но его нельзя применять для поздней стадии коллапса. В работах [43–46] предлагается конечно-разностный метод решения задач динамики пузырьков с применением адаптивных сеток. В работе [1] дается обзор ранних работ по динамике пузырьков около границ. Метод конечных элементов для изучения взаимодействия деформируемого пузырька с твердой стенкой при умеренных числах Рейнольдса в рамках полных уравнений Навье–Стокса применяется в [47]. Предполагается, что пузырек движется под влиянием выталкивающей силы. Проведено сравнение с известными теоретическими и экспериментальными данными. Эффект вязкости при формировании струи при коллапсе пузырьков около твердой поверхности численно изучается в [48]. Представлена методика численного решения уравнений Навье–Стокса с условиями на свободной поверхности. Получено хорошее согласование с экспериментальными данными для коллапса больших пузырьков, но амплитуда следующих за коллапсом радиальных колебаний получается больше, чем в эксперименте. Взаимодействие отдельных пузырьков (со временем коллапса 121 мкс), созданных лазером, около силиконовой резиновой мембраны с ударной волной (с пиковым давлением 55 МПа и длительностью импульса сжатия 1.7 мкс) изучается в [49]. Взаимодействие ведет к коллапсу пузырька с формированием микроструи, направленной к мембране. Такие струйки можно использовать как средство микроинъекции для доставки макромолекул и генов к биологическим тканям.

Отметим, что если деформации пузырька малы, то его динамику обычно описывают системой ОДУ, решаемой методами Рунге–Кутты. В противном случае используются уравнения в частных производных. Для их решения, как правило, применяют метод граничных элементов или методы конечных разностей и конечных элементов. При этом деформации поверхности пузырьков могут быть практически произвольными. Предположение о малости деформаций позволяет построить наиболее экономичные с вычислительной точки зрения алгоритмы. При отказе от этого ограничения решение задач динамики пузырьков методом граничных элементов оказывается значительно экономичнее, чем их решение методами конечных разностей и конечных элементов. Однако методы конечных разностей и конечных элементов позволяют довольно полно учесть эффекты вязкости жидкости, ее теплообмена с пузырьками и т. д.

В большинстве существующих моделей жидкость около пузырька считается несжимаемой, газ в пузырьке – гомобарическим, а тело – недеформируемым (эффекты вязкости и сжимаемости жидкости, ее теплообмена с пузырьком обычно учитываются по упрощенным моделям). Вместе с тем экспериментальные данные свидетельствуют о том, что в финале сильного несферического схлопывания пузырька в его окрестности могут возникать ударные волны [50]. В таких случаях для моделирования воздействия пузырька на тело необходимо правильно описывать распространение ударных волн и в жидкости, и в деформируемом теле, а возможно, и в полости пузырька.

## 2. Ударное воздействие пузырьков на твердое деформируемое тело

В настоящей работе рассматривается схлопывание пузырька у стенки с образованием на поверхности пузырька высокоскоростной струи, в результате воздействия которой в теле возникают ударные волны. Схлопывание считается осесимметричным, с осью симметрии  $z$ , направленной перпендикулярно плоской поверхности тела. За начало отсчета времени  $t = 0$  принимается момент, когда кончик струи касается либо поверхности тела (рис. 4, а, сверху), либо противоположной (нижней) части поверхности пузырька (рис. 4, а, снизу). Во втором случае между пузырьком и стенкой имеется прослойка жидкости. Форма пузырька упрощается так, как показано на рис. 4, б. Кроме того, принимается, что по сравнению с поперечным размером струи полость пузырька является настолько большой, что влиянием ее верхней и боковой поверхностей можно пренебречь. Итак, в начальный момент времени имеет место конфигурация, показанная на рис. 4, в.

Для описания волн в упругом теле при осевой симметрии используются уравнения [51]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} \right), & \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} \right), \\ \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u}{r} \right), & \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial z} + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right), \\ \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial t} &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{u}{r}, & \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial t} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Динамика волн в жидкости описывается уравнениями линейной акустики

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $r, z$  – цилиндрические координаты точки среды;  $t$  – время;  $u, v$  – компоненты скорости по осям  $r$  и  $z$  соответственно;  $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\varphi, \tau_{rz}$  – компоненты

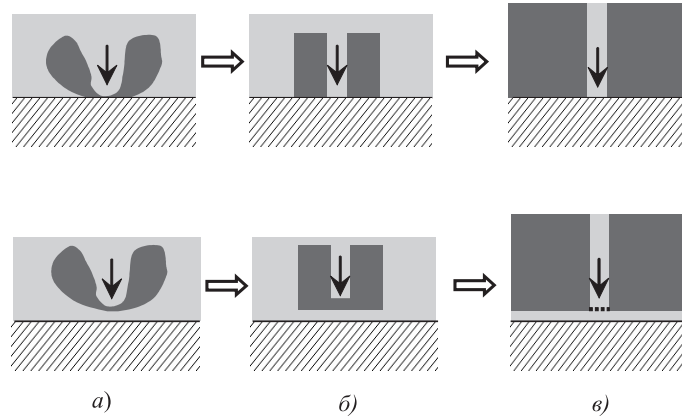


Рис. 4. Упрощение формы струи (слева направо)

напряжений в упругом теле;  $\lambda$ ,  $\mu$  – параметры Ламе;  $\rho$  – невозмущенная величина плотности упругого тела;  $p$  – давление жидкости;  $\rho_0$ ,  $c_0$  – невозмущенные величины плотности и скорости звука в жидкости.

Струя занимает цилиндрическую область  $(0 \leq r \leq R) \times (z_j \leq z < \infty)$ , жидкая прослойка – область  $(0 \leq r < \infty) \times (0 \leq z \leq z_j)$ , а упругое тело – область  $(0 \leq r < \infty) \times (-\infty < z \leq 0)$ . Условия на границе  $z = 0$  раздела фаз жидкость – твердое тело имеют вид:

$$\sigma_z^- = -p^+, \quad v^- = v^+, \quad \tau_{rz}^- = 0. \quad (3)$$

(верхний индекс «плюс» указывает на то, что параметр относится к жидкости, «минус» – к телу). На оси симметрии  $r = 0$  ставятся следующие условия:

$$\begin{aligned} u = 0, \quad \tau_{rz} = 0 \quad \text{при} \quad -\infty < z \leq 0 \quad (\text{область тела}), \\ u = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq z < \infty \quad (\text{область жидкости}). \end{aligned} \quad (4)$$

На внешних границах струи ( $r = R$ ,  $z_j < z < \infty$ ) и прослойки ( $R < r < \infty$ ,  $z = z_j$ ) имеем

$$p = p_0, \quad (5)$$

где  $p_0$  – невозмущенное давление жидкости. Если жидкой прослойки нет, то на свободной поверхности тела ( $R < r < \infty$ ,  $z = 0$ )

$$\sigma_z = -p_0, \quad \tau_{rz} = 0. \quad (6)$$

На бесконечно удаленных границах тело и жидкость считаются невозмущенными.

В начальный момент времени  $t = 0$ : в струе  $p = p_0$ ,  $u = 0$ ,  $v = v_0$ ; в жидкой прослойке  $p = p_0$ ,  $u = v = 0$ ; в упругом теле деформации в радиальном и окружном направлениях отсутствуют, при этом

$$\sigma_z = -p_0, \quad \sigma_r = \sigma_\varphi = -\lambda(\lambda + 2\mu)^{-1}p_0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad u = v = 0.$$

Для решения задачи (1)–(6) применяется конечно-разностный метод Годунова первого порядка точности [52]. Бесконечно удаленные границы  $z = -\infty$ ,  $z = \infty$ ,  $r = \infty$  заменяются искусственными границами  $z = z_{-\infty}$ ,  $z = z_\infty$ ,  $r = R_\infty$ . Искусственные границы выбираются удаленными настолько, чтобы отраженные от них волны не оказывали заметного влияния на изучаемые параметры в окрестности оси симметрии в области контактной границы, где возникают максимальные

давления в жидкости и напряжения в твердом теле. Для сокращения расчетной области на ее искусственных границах ставятся неотражающие условия [53]:

$$\begin{aligned} \rho c_1 v - \sigma_z &= \rho c_1 v^0 - \sigma_z^0, & \rho c_2 u - \tau_{rz} &= \rho c_2 u^0 - \tau_{rz}^0 & \text{при } z = z_{-\infty}, \\ \rho c_1 u + \sigma_r &= \rho c_1 u^0 + \sigma_r^0, & \rho c_2 v + \tau_{rz} &= \rho c_2 v^0 + \tau_{rz}^0 & \text{при } r = R_\infty, -\infty < z \leq 0, \\ \rho_0 c_0 u - p &= \rho_0 c_0 u^0 - p_0 & & & \text{при } r = R_\infty, 0 < z \leq z_j, \\ \rho_0 c_0 v + p &= \rho_0 c_0 v^0 + p_0 & & & \text{при } z = z_\infty. \end{aligned}$$

Здесь  $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)\rho^{-1}}$ ,  $c_2 = \sqrt{\mu\rho^{-1}}$  – продольная и сдвиговая скорости звука в упругом теле соответственно.

Расчеты проводились на прямоугольной разностной сетке с ячейками размерами  $h_r$  по оси  $r$  и  $h_z$  по оси  $z$ . В области  $(0 \leq r \leq R) \times (-R \leq z \leq z_j)$ , включающей часть тела и часть прослойки, где амплитуда волн сжатия принимает максимальные значения, ячейки выбирались квадратными с  $h_r = h_z = h_R$ , где  $h_R = R/N_R$ ,  $N_R$  – число ячеек. По мере удаления от этой области один или оба из размеров ячеек последовательно увеличивались по геометрической прогрессии со знаменателем  $q > 1$ . В области струи принималось  $q = 1.005$ , в остальных областях  $q = 1.003$ . Полагалось, что с точностью до соответствующего размера ячеек  $z_{-\infty} \approx -5R$ ,  $R_\infty \approx 5R$ ,  $z_\infty \approx 2.5R$ .

Шаг по времени  $\tau$  определялся из условия устойчивости Куранта [52]. При принятой структуре расчетной сетки выражение для  $\tau$  имело вид

$$\tau = \alpha_{CRT} \frac{h_R}{2c_1},$$

где  $\alpha_{CRT}$  – число Куранта, которое полагалось равным 0.95.

Изучается удар водяной струи по стальному телу при:  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_0 = 1500$  м/с,  $v_0 = -100$  м/с,  $\rho = 8000$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_1 = 5742.9$  м/с,  $c_2 = 3069.7$  м/с,  $p_0 = 1$  бар,  $R = 20$  мкм. Основное внимание уделяется силовым характеристикам: давлению жидкости  $p$ , напряжениям в теле. Для оценки уровня напряжений используется величина интенсивности напряжений  $\sigma_i$ :

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_z - \sigma_\phi)^2 + (\sigma_r - \sigma_\phi)^2 + 6\tau_{rz}^2}.$$

Для анализа возмущений давления и напряжений используются безразмерные величины

$$\epsilon = \frac{p - p_0}{p_* - p_0}, \quad \epsilon_z = \frac{\sigma_z - \sigma_z^0}{\sigma_z^* - \sigma_z^0}, \quad \epsilon_i = \frac{\sigma_i - \sigma_i^0}{\sigma_i^* - \sigma_i^0}.$$

Здесь  $\sigma_z^0$ ,  $\sigma_i^0$  – начальные значения осевых напряжений и интенсивности напряжений в теле,  $p_*$ ,  $\sigma_z^*$ ,  $\sigma_i^*$  – максимальные значения соответствующих параметров в одномерной задаче при ударе по упругому полупространству струи бесконечного радиуса в случае отсутствия между струей и телом прослойки. При принятых входных данных  $\sigma_i^0 = 2\mu(\lambda + 2\mu)^{-1}p_0 \approx 0.57$  бар,  $p_* \approx 1450$  бар,  $\sigma_z^* = -p_* \approx -1450$  бар,  $\sigma_i^* = 2\mu(\lambda + 2\mu)^{-1}p_* \approx 830$  бар. Из условий (3) следует, что на границе  $z = 0$  между жидкостью и телом  $\epsilon = \epsilon_z$ .

Сходимость численного решения по мере измельчения сетки иллюстрирует рис. 5, где представлены распределения максимальных по времени значений безразмерных возмущений давления жидкости  $\epsilon^{\max}(r, z) = \max_t[\epsilon(r, z, t)]$  и осевых

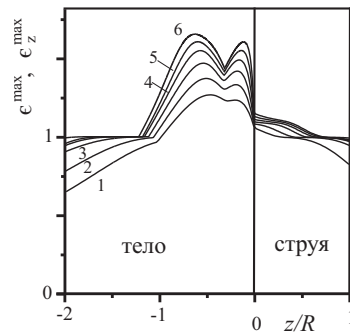


Рис. 5. Распределения максимальных по времени значений безразмерных возмущений давления жидкости  $\epsilon^{\max}$  и осевых напряжений в упругом теле  $\epsilon_z^{\max}$  на оси симметрии для сеток с  $N_R = 40; 80; 160; 320; 640; 1280$  (кривые 1–6 соответственно)

напряжений в упругом теле  $\epsilon_z^{\max}(r, z) = \max_t[\epsilon_z(r, z, t)]$  на оси симметрии для  $N_R = 40; 80; 160; 320; 640; 1280$  (кривые 1–6 соответственно) в задаче без прослойки жидкости. Видно, что с измельчением сетки численное решение сходится со скоростью, типичной для разностных схем первого порядка точности. Последующие результаты получены на сетке с  $N_R = 160$ .

Рис. 6 и 7 характеризуют изменение полей давления в жидкости и осевых напряжений в упругом теле при ударе струи по поверхности тела в случае отсутствия между ними прослойки жидкости. На этих и последующих рисунках  $t_1 - t_6$  равны 1.74, 4.77, 6.51, 7.05, 8.25, 10.3 нс соответственно. На рис. 6 даны изолинии безразмерных возмущений давления жидкости  $\epsilon$  и осевых напряжений в упругом теле  $\epsilon_z$ , а на рис. 7 – профили  $\epsilon$  и  $\epsilon_z$  на оси симметрии. В момент удара струи по поверхности тела давление и осевое напряжение на поверхности тела скачкообразно становятся равными  $p = p_*$  и  $\sigma_z = -p_*$  соответственно, так что в этот момент  $\epsilon = \epsilon_z = 1$ . В результате удара в струе и теле возникают плоские (с фронтом, ортогональным оси симметрии) ударные волны, распространяющиеся вдоль оси симметрии со скоростями  $c_0$  в струе и  $c_1$  – в теле. Так как  $c_1 > c_0$ , то ударная волна в теле распространяется быстрее, чем в жидкости. При численном решении фронт ударной волны получается не скачкообразным, что соответствовало бы обобщенному решению данной задачи, а “размазанным” из-за эффекта схемной вязкости. С измельчением сетки толщина фронта ударной волны уменьшается. Волновая картина в жидкости во многом определяется тем, что на область сжатия между фронтом ударной волны и поверхностью тела оказывает влияние волна разрежения, возникающая на боковой поверхности струи. Волновая картина в упругом теле значительно сложнее. Она зависит от взаимодействия волн давления в жидкости и волн нормальных напряжений в теле как между собой, так и со свободными границами. Кроме того, на нее оказывает влияние и взаимодействие волн нормальных и сдвиговых напряжений. В результате этого в теле в окрестности оси симметрии на расстоянии, равном примерно  $0.5R$ , от поверхности контакта, возникают сжимающие напряжения (моменты  $t_3, t_4$ ), значительно (почти в 1.5 раза) превосходящие их максимальные значения в начале ударного воздействия (при  $t \leq t_1$ , когда максимальные значения  $\epsilon$  и  $\epsilon_z$  равны 1).

Напряженное состояние в упругом теле в моменты  $t_1 - t_6$  характеризуют рис. 8, 9. На рис. 8 даны изолинии возмущений интенсивности напряжений  $\epsilon_i$ , а на рис. 9 – профили  $\epsilon_i$  вдоль оси симметрии  $z$ . Видно, что максимальные значения  $\sigma_i$  возникают вблизи линии пересечения боковой поверхности струи с

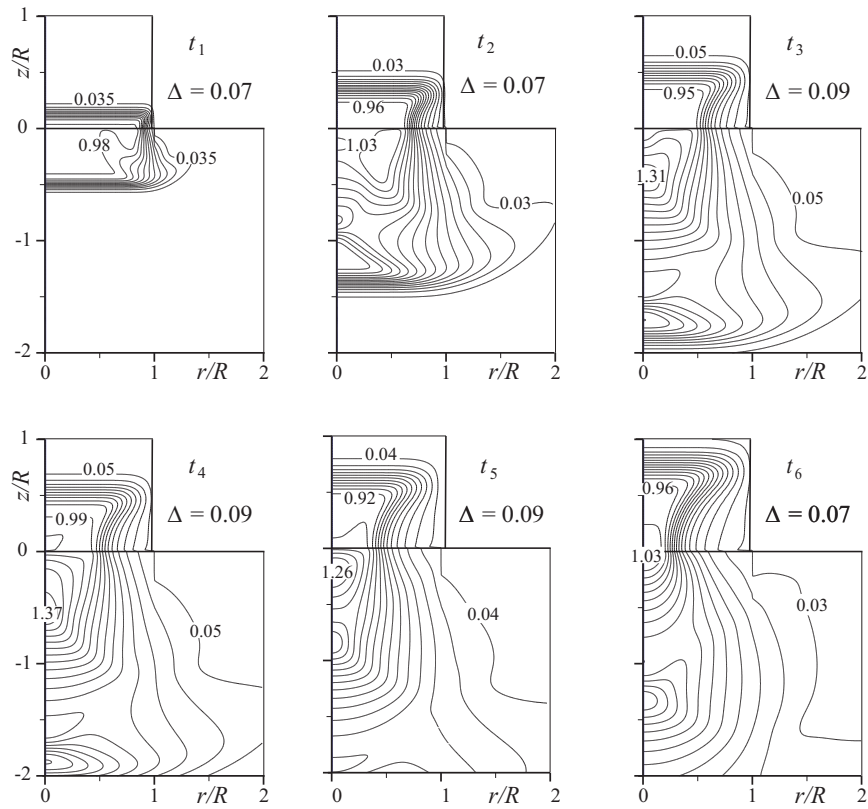


Рис. 6. Изолинии безразмерных возмущений давления жидкости в струе  $\epsilon$  и осевых напряжений в упругом теле  $\epsilon_z$  в окрестности зоны их контакта (прослойки жидкости нет) в шесть последовательных моментов времени  $t_1 - t_6$ . В каждый момент времени дано 15 изолиний (с шагом  $\Delta$ ) и указаны их максимальные и минимальные значения

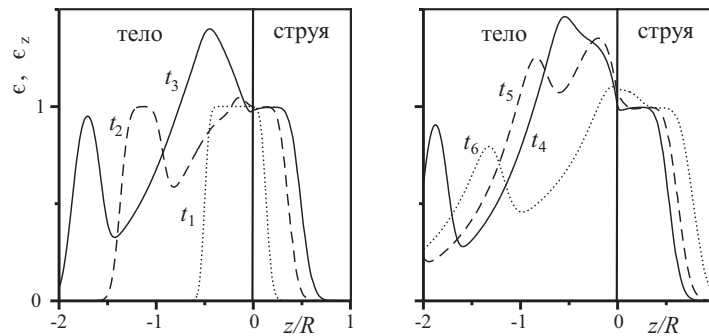


Рис. 7. Профили  $\epsilon$  и  $\epsilon_z$  на оси симметрии в моменты  $t_1 - t_6$

границей тела (момент  $t_1$ ). С течением времени точка в плоскости  $r, z$ , где достигается максимальное значение, смещается к оси симметрии, удаляясь от поверхности контакта. К моменту  $t_3$  эта точка достигает оси симметрии, а затем смещается по ней вглубь тела. Величина максимума  $\sigma_i$  возрастает до  $t \approx t_4$ , а затем убывает. В момент  $t_4$  максимальное значение  $\sigma_i$  примерно в 3 раза превосходит величину  $\sigma_i^*$ , определяемую как решение одномерной задачи.

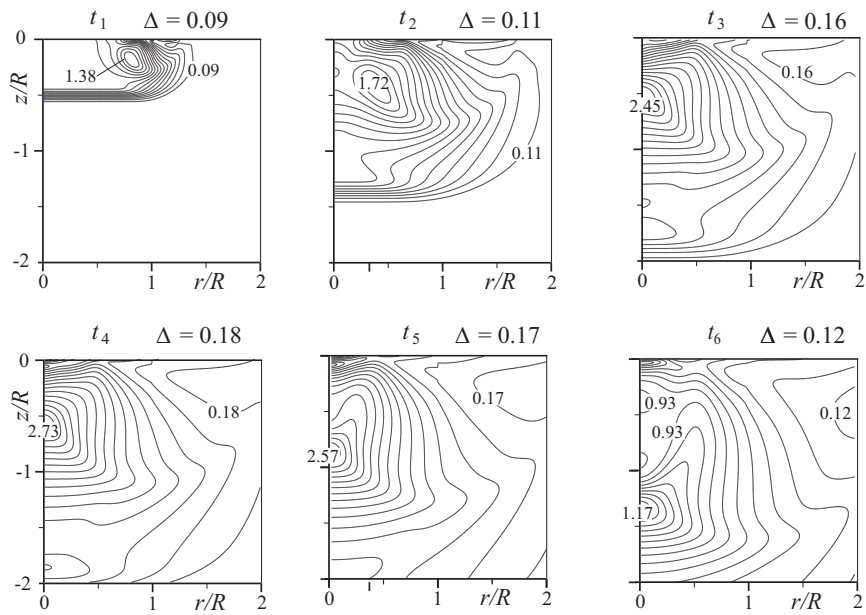


Рис. 8. Изолинии безразмерных возмущений интенсивности напряжений в упругом теле  $\epsilon_i$  в те же моменты времени, что и на рис.6

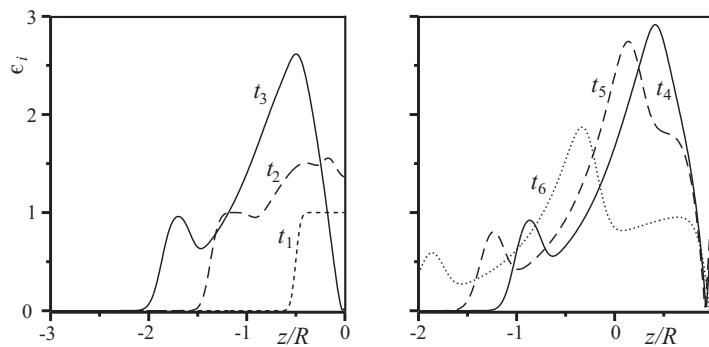


Рис. 9. Профили  $\epsilon_i$  на оси симметрии в моменты  $t_1 - t_6$

На рис. 10 приведены изолинии максимальных по времени значений безразмерных возмущений интенсивности напряжений в теле  $\epsilon_i^{\max} = \max_t [\epsilon_i(r, z, t)]$ . Видно, что наиболее напряженной областью тела является окрестность точки оси симметрии с координатой  $z \approx 0.7R$ .

Выше был рассмотрен случай удара струи непосредственно по поверхности тела. Если имеется прослойка жидкости, то струя сначала воздействует на прослойку. В результате в струе и прослойке возникают ударные волны. Одна из волн распространяется по струе навстречу ее движению, другая – по прослойке по направлению к телу. При этом на боковой поверхности струи и свободной поверхности прослойки возникают волны разрежения, ослабляющие влияние ударных волн. В результате воздействие ударной волны на тело оказывается более слабым, чем при отсутствии прослойки. Таким образом, прослойка играет определенную демпфирующую роль.

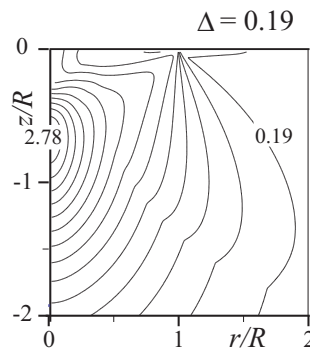


Рис. 10. Изолинии максимальных по времени значений безразмерных возмущений интенсивности напряжений в упругом теле  $\epsilon_i^{\max}$ . Прослойка жидкости отсутствует

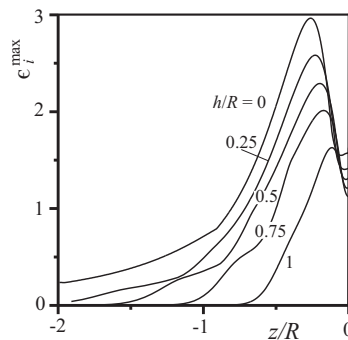


Рис. 11. Распределения максимальных по времени значений безразмерных возмущений интенсивности напряжений в упругом теле  $\epsilon_i^{\max}$  на оси симметрии для разных значений толщины прослойки жидкости  $h$  между струей и телом

Влияние толщины прослойки на величину максимальных значений интенсивности напряжений в теле характеризует рис. 11. На этом рисунке показаны распределения максимальных по времени значений возмущений  $\epsilon_i^{\max}$  на оси симметрии вблизи поверхности контакта между телом и жидкостью для разных значений толщины прослойки жидкости  $h$  между струей и телом. Видно, что максимальные значения  $\epsilon_i^{\max}$  достигаются не на поверхности тела, а на некотором удалении от нее. По мере увеличения толщины прослойки  $h$  размеры области, где  $\epsilon_i^{\max} > 1$ , уменьшаются. При этом максимальное значение  $\epsilon_i^{\max}$  также уменьшается, а точка, где этот максимум достигается, постепенно смещается к контактной поверхности.

### Заключение

Дан краткий обзор работ по динамике пузырька у стенки.

Проведено численное моделирование ударного воздействия на упругое тело высокоскоростной струи жидкости, имеющей форму столбика с плоским концом. Входные данные являются характерными для струи, возникающей на поверхности маленького кавитационного пузырька при его схлопывании около поверхности большого тела (скорость струи 100 м/с, радиус 20 мкм; давление в полости пузырька 1 бар).

Показано, что при воздействии водяной струи на стальное тело величина нормальных напряжений в теле может достигать значений порядка 2500 бар. При этом

наиболее напряженная область возникает в окрестности оси симметрии на удалении примерно  $0.75$  радиуса струи от поверхности тела. В этой области максимальные значения интенсивности напряжений оказываются в 2 раза выше, чем на поверхности тела. По мере увеличения толщины прослойки максимальное значение интенсивности напряжений уменьшается, а его положение постепенно смещается к контактной поверхности.

Работа выполнена в рамках программы РАН и при поддержке РФФИ.

#### Summary

*A.A. Aganin, M.A. Ilgamov, V.G. Malakhov, T.F. Khalitova, N.A. Khismatullina.* Shock Impact of a Cavitation Bubble on an Elastic Body.

Axially symmetric impact of a high-speed jet arising on the surface of a bubble during its collapse near a surface of a body is studied. The jet is directed orthogonally to the plane surface of the body. The body is modelled by elastic semi-space, and the jet is modelled by a cylindrical liquid column. The waves in the liquid are described by the linear acoustics; the waves in semi-space are described by the linearly elastic body. Both the case when the bubble is in direct contact with the surface of the body and the case when there is an intermediate liquid layer between them are considered. The instant the jet touches upon the surface of the body or the intermediate liquid layer is taken as the initial one. Results of computation of shock impact of a water jet on a steel body for various thicknesses of the intermediate layer are presented.

**Key words:** cavitation destruction, non-spherical bubble dynamics, collapse of a bubble near a wall, interaction of a bubble with a wall.

#### Литература

1. *Blake J.R., Gibson D.C.* Cavitation bubbles near boundaries // *An. Rev. Fluid Mech.* – 1987. – V. 19. – P. 99–123.
2. *Rayleigh Lord.* On the pressure developed in a liquid on a collapse of a spherical cavity // *Phylos Mag.* – 1917. – V. 34, No 200. – P. 94–97.
3. *Kornfeld M., Suvorov N.* On the destructive action of cavitation // *Appl. Phys.* – 1944. – V. 15. – P. 495–506.
4. *Plesset M.S., Chapman R.B.* Collapse of an initially spherical vapour cavity in the neighbourhood of a solid boundary // *J. Fluid Mech.* – 1971. – V. 47. – P. 283–290.
5. *Lauterborn W., Bolle H.* Experimental investigations of cavitation-bubble collapse in the neighbourhood of a solid boundary // *J. Fluid Mech.* – 1975. – V. 72. – P. 391–399.
6. *Blake J.R., Keen G.S., Tong R.P., Wilson M.* Acoustic cavitation: the fluid dynamics of non-spherical bubbles // *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* – 1999. – V. 357. – P. 251–267.
7. *Shima A., Sato Y.* The collapse of a spherical bubble near a solid wall // *J. de Mécanique.* – 1981. – V. 20. – P. 253–271.
8. *Chahine G.L., Bovis A.G.* Pressure field generated by non-spherical bubble collapse // *Trans. ASME. J. Fluid Eng.* – 1983. – V. 105. – P. 356–363.
9. *Аганин А.А., Давлетшин А.И.* Моделирование взаимодействия газовых пузырьков в жидкости с учетом их малой несферичности // *Матем. моделирование.* – 2009. – Т. 21, № 6. – С. 89–102.
10. *Воинов О.В., Воинов В.В.* Численный метод расчета нестационарных движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными поверхностями // *Докл. АН СССР.* – 1975. – Т. 221, № 3. – С. 559–562.

11. *Войнов О.В., Войнов В.В.* О схеме захлопывания кавитационного пузырька около стенки и образования кумулятивной струйки // Докл. АН СССР. – 1976. – Т. 227, № 1. – С. 63–66.
12. *Blake J.R., Taib B.B., Doherty G.* Transient cavities near boundaries. Part 1. Rigid boundary // J. Fluid Mech. – 1986. – V. 170. – P. 479–497.
13. *Kurbatskii K.A., Kedrinskii V.K.* Collapse of a bubble in the cavitation zone near a rigid boundary // Abstr. of 124th Meeting of ASA, Oct. 31 – Nov. 4, 1992. – New Orleans, 1992. – P. 2453.
14. *Best J.P.* The formation of toroidal bubbles upon the collapse of transient cavities // J. Fluid Mech. – 1993. – V. 251. – P. 79–107.
15. *Blake J.R., Robinson P.B., Shima A., Tomita Y.* Interaction of two cavitation bubbles with a rigid boundary // J. Fluid Mech. – 1993. – V. 255. – P. 707–721.
16. *Chahine G.L., Duraiswami R.* Boundary element method for calculating 2-D and 3-D underwater explosion bubble behavior in free water and near structures: NSWC Weapons Research and Technology Department Report NCWCDD/TR-93/44. – 1994.
17. *Boulton-Stone J.M.* A comparison of boundary integral methods for studying the motion of two-dimensional bubble in an infinite fluid // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1993. – V. 102. – P. 213–234.
18. *Sato K., Tomita Y., Shima A.* Numerical analysis of a gas bubble near a rigid boundary in an oscillating pressure field. // J. Acoust. Soc. Am. – 1994. – V. 95. – P. 2416–2424.
19. *Robinson P.B., Boulton-Stone J.M., Blake J.R.* Application of the boundary integral method to the interaction of rising two-dimensional deformable gas bubbles // J. Eng. Math. – 1995. – V. 29, No 5. – P. 393–412.
20. *Blake J.R., Hooton M.C., Robinson P.B., Tong R.P.* Collapsing cavities, toroidal bubbles and jet impact // Phil. Trans. R. Soc. Lond., Ser. A. – 1997. – V. 355, No 1724. – P. 537–550.
21. *Blake J.R., Tomita Y., Tong R.P.* The Art, Craft and Science of Modelling Jet Impact in a Collapsing Cavitation Bubble // Appl. Sci. Res. – 1998. – V. 58, No 1–4. – P. 77–90.
22. *Wang Q.X.* The Evolution of a Gas Bubble Near an Inclined Wall // Theor. Comp. Fluid Dynamics. – 1998. – V. 12, No 1. – P. 29–51.
23. *Zhang Y.L., Yeo K.S., Khoo B.C., Chong W.K.* Simulation of three-dimensional bubbles using desingularized boundary integral method // Int. J. Numer. Meth. Fluid. – 1999. – V. 31, No 8. – P. 1311–1320.
24. *Harris P.J., Verma A., Chakrabarti R.* Interaction of an explosion bubble with a fixed rigid structure // Int. J. Numer. Meth. Fluid. – 1999. – V. 29, No 4. – P. 389–396.
25. *Blake J.R., Keen G.S., Tong R.P., Wilson M.* Acoustic cavitation: the fluid dynamics of non-spherical bubbles // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. – 1999. – V. 357. – P. 251–267.
26. *Афанасьев К.Е., Григорьева И.В.* Исследование эволюции пространственного кавитационного пузыря около твердой стенки в идеальной несжимаемой жидкости при наличии поверхностного натяжения // Труды Матем. центра им. Лобачевского. – Казань, 2000. – Т. 7. – С. 38–42.
27. *Brujan E.A., Keen G.S., Vogel A., Blake J.R.* The final stage of the collapse of a cavitation bubble close to a rigid boundary // Phys. Fluids. – 2002. – V. 14, No 1. – P. 85–92.
28. *Zhang Z.Y., Zhang H.S.* Surface tension effects on the behavior of a cavity growing, collapsing, and rebounding near a rigid wall // Phys. Rev. E. – 2004. – V. 70, No 5. – P. 056310-1–056310-15.

29. *Zhang Z.Y., Zhang H.S.* Surface tension effects on the behavior of two cavities near a rigid wall // *Phys. Rev. E.* – 2005. – V. 71, No 6. – P. 066302-1–066302-16.
30. *Afanasiev K.E., Grigorieva I.V.* Numerical investigation of three-dimensional bubble dynamics // *J. Eng. Math.* – 2006. – V. 55, No 1–4. – P. 65–80.
31. *Lee M., Klaseboer E., Khoo B.C.* On the boundary integral method for the rebounding bubble // *J. Fluid Mech.* – 2007. – V. 570. – P. 407–429.
32. *Lenoir M.* Calcul numerique de l'implosion d'une bulle de cavitation au voisinage d'une paroi ou d'une surface libre // *J. de Mécanique.* – 1976. – V. 15. – P. 725–751.
33. *Prosperetti A.* Bubble dynamics: a review and some recent results // *Appl. Sci. Res.* – 1982. – V. 38, No 1. – P. 145–164.
34. *Taib B.B., Doherty G., Blake J.R.* Boundary integral methods applied to cavitation bubble dynamics // *Proc. Cent. for Math. Anal. ANU Math. Program. and Numerical Anal Workshop* / Ed. S.A. Gustafson, R.S. Womersley. – 1984. – V. 6. – P. 166–186.
35. *Taib B.B.* Boundary integral methods applied to cavitation bubble dynamics: PhD Thesis. – New South Wales, Australia: Univ. Wollongong, 1985.
36. *Blake J.R., Taib B.B., Doherty G.* Transient cavities near boundaries Part 2. Free surface // *J. Fluid Mech.* – 1987. – V. 181, No 1. – P. 197–212.
37. *Stroud A.H., Secrest D.* Gaussian Quadrature Formulas. – Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1966. – 383 p.
38. *Mitchell T.M., Kling C.L., Cheesewright R., Hammit F.G.* Numerical and photographic studies of asymmetric bubble collapse: University of Michigan Technical Report 07738\_5\_T, July, 1967. – URL: <http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/2027.42/6658/5/bac9336.0001.001.pdf>, свободный.
39. *Harlow F.G., Welch J.E.* Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surfaces // *Phys. Fluid.* – 1965. – V. 8. – P. 2182–2189.
40. *Plesset M.S., Chapman R.B.* Collapse of an initially spherical vapour cavity in the neighbourhood of a solid boundary: Report No. 85-49. – Pasadena, California: Division of Engineering and Applied Science, California Institute of Technology, 1970. – URL: [http://authors.library.caltech.edu/4075/1/Plesset\\_ms\\_85-49.pdf](http://authors.library.caltech.edu/4075/1/Plesset_ms_85-49.pdf), свободный.
41. *Mitchell T.M., Hammit F.G.* Asymmetric cavitation bubble collapse // *Trans. ASME.* – 1973. – V. D95, No 1. – P. 29–37. = Митчел Т.М., Хэммит Ф.Г. Несимметричное схлопывание кавитирующего пузырька // *Теор. основы инж. расчетов.* – 1973. – Т. 95, № 1. – С. 98–107.)
42. *Bevir M.K., Fielding P.J.* Numerical solution of incompressible bubble collapse with jetting // *Moving boundary Problems in Heat Flow and Diffusion* / Ed. J.R. Ockendon, W.R. Hodgkins. – Oxford: Clarendon Press, 1975. – P. 286–294.
43. *Ryskin G., Leal L.G.* Orthogonal mapping // *J. Comput. Phys.* – 1983. – V. 56. – P. 71–100.
44. *Ryskin G., Leal L.G.* Numerical solutions of free boundary problems in fluid mechanics. Part I. The finite-difference technique // *J. Fluid Mech.* – 1984. – V. 148. – P. 1–17.
45. *Ryskin G., Leal L.G.* Numerical solutions of free boundary problems in fluid mechanics. Part II. Buoyancy-driven motion of a gas bubble through a quiescent liquid // *J. Fluid Mech.* – 1984. – V. 148. – P. 19–36.
46. *Ryskin G., Leal L.G.* Numerical solutions of free boundary problems in fluid mechanics. Part III. Bubble deformation in an axisymmetric straining flow // *J. Fluid Mech.* – 1984. – V. 148. – P. 37–44.

47. *Shopov P.J., Minev P.D., Bazhlekov I.B., Zapryanov Z.D.* Interaction of a deformable bubble with a rigid wall at moderate Reynolds numbers // *J. Fluid Mech.* – 1990. – V. 219. – P. 241–271.
48. *Popinet S., Zaleski S.* Bubble collapse near solid boundary: a numerical study of the influence of viscosity // *J. Fluid Mech.* – 2002. – V. 464. – P. 137–163.
49. *Sankin G.N., Zhong P.* Interaction between shock wave and single inertial bubbles near an elastic boundary // *Phys. Rev. E.* – 2006. – V. 74, No 4. – P. 046304-1–046304-4.
50. *Mettin R., Luther S., Lindau O., Koch P., Lauterborn W.* Investigations of cavitation bubble dynamics by means of fast cinematography // *Dynamics of Multiphase Systems: Proceedings of Int. Conf. on Multiphase Systems, ICMS'2000, June 15–17, 2000, Ufa, Bashkortostan, Russia.* – Ufa: Gilem Publ., Pol Publ., 2000. – P. 279–287.
51. *Чебан В.Г., Навал И.К., Сабодаш П.Ф., Чередниченко Р.А.* Численные методы решения задач динамической теории упругости. – Кишинев: Штиинца, 1976. – 226 с.
52. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
53. *Ильгамов М.А., Гильманов А.Н.* Неотражающие условия на границах расчетной области. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 240 с.

Поступила в редакцию  
05.04.10

---

**Аганин Александр Алексеевич** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией Института механики и машиностроения КазНЦ РАН.

E-mail: [aganin@kfti.knc.ru](mailto:aganin@kfti.knc.ru)

**Ильгамов Марат Аксанович** – доктор физико-математических наук, чл.-корр. РАН, заведующий лабораторией Института механики Уфимского научного центра РАН.

E-mail: [ilgamov@anrb.ru](mailto:ilgamov@anrb.ru)

**Малахов Владимир Георгиевич** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института механики и машиностроения КазНЦ РАН.

E-mail: [malahov@kfti.knc.ru](mailto:malahov@kfti.knc.ru)

**Халитова Талия Фаритовна** – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института механики и машиностроения КазНЦ РАН.

E-mail: [taliny@mail.ru](mailto:taliny@mail.ru)

**Хисматуллина Наиля Абдулхаевна** – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института механики и машиностроения КазНЦ РАН.

E-mail: [nailya\\_hism@mail.ru](mailto:nailya_hism@mail.ru)