

УДК 539.3

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ
ФЛЮИДОНАСЫЩЕННЫХ СРЕД НА ОСНОВЕ
ПРОИЗВОЛЬНОГО ЛАГРАНЖЕВО-ЭЙЛЕРОВА
ПОДХОДА К ОПИСАНИЮ ДВИЖЕНИЯ.
I. КИНЕМАТИКА ДВИЖЕНИЯ, ОСНОВНАЯ СИСТЕМА
РАЗРЕШАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ**

Д.В. Бережной, А.И. Голованов, С.А. Малкин, Л.У. Султанов

Аннотация

Настоящая работа открывает цикл статей, посвященных построению вычислительного алгоритма исследования неизотермического деформирования флюидонасыщенных пористых сред. В первой части цикла работ излагаются основные положения кинематики двухфазных сред с учетом произвольного лагранжево-эйлерова подхода к описанию движения. Приводится основная система разрешающих и определяющих уравнений.

Ключевые слова: произвольный лагранжево-эйлеров подход, неизотермическое деформирование, флюидонасыщенные пористые среды, вязкопластическое деформирование.

Введение

В механике континуума широкое распространение получили два основных подхода к описанию движения. Это разделение в подходах было перенесено и на численные приложения, которые появились в последние годы. Однако подходы Лагранжа и Эйлера при численном исследовании поведения континуума имеют определенные ограничения. Например, для лагранжевого подхода любая точка, в которой определяют характеристики механического процесса, непосредственно связана с материальной частицей. Поэтому чрезмерная деформация расчетной области неизменно ведет к чрезмерной деформации сетки. С другой стороны, эйлеровы сетки определяются непосредственными точками в пространстве, поэтому значительное движение континуума на границе не может быть объяснено точно. Кроме того, большие трудности возникают, когда при описании деформирования флюидонасыщенной пористой матрицы полагают, что движение жидкости описывается по Эйлеру, а движение скелета – по Лагранжу. Чтобы объединить преимущества этих подходов и преодолеть ограничения, налагаемые ими, был предложен произвольный лагранжево-эйлеров подход (ALE). Подобный подход хорошо представлен в доступных источниках, в частности, можно отметить работы [1–6] или более поздние [7–13].

Настоящая статья посвящена выводу уравнений, описывающих процесс неизотермического деформирования флюидонасыщенной пористой матрицы. Рассмотрен случай квазистатического деформирования, когда инерционными слагаемыми можно пренебречь.

Для описания процесса деформирования используется произвольная лагранжево-эйлерова постановка. Поведение материальной точки пористой матрицы (элементарного объема) отслеживается в соответствии с лагранжевым методом описания среды, а процесс фильтрации описывается на основе подхода Эйлера.

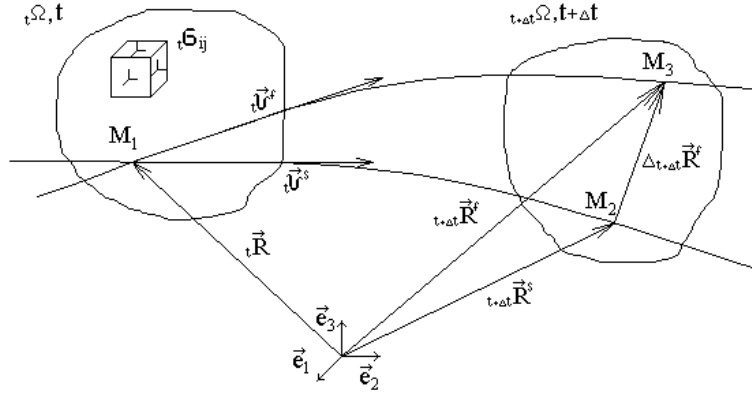


Рис. 1

1. Кинематика среды

Рассмотрим точку M_1 , положение которой определяется радиус-вектором ${}_t\mathbf{R}$ в текущей конфигурации ${}_t\Omega$ (рис. 1).

Пусть в этой точке в момент времени t находилась материальная частица скелета грунта и материальная частица жидкой фракции. Через бесконечно малый промежуток времени Δt материальная частица скелета грунта переместится в точку M_2 , положение которой определит радиус-вектор ${}_{t+\Delta t}\mathbf{R}^s$ в конфигурации ${}_{t+\Delta t}\Omega$. А материальная частица жидкости переместится в точку M_3 , положение которой определит радиус-вектор ${}_{t+\Delta t}\mathbf{R}^f$ в конфигурации ${}_{t+\Delta t}\Omega$. Движение материальной частицы будем считать базовым, поэтому для упрощения записи обозначим ${}_{t+\Delta t}\mathbf{R}^s = {}_{t+\Delta t}\mathbf{R}$. Положение точек M_2 и M_3 с точностью до бесконечно малых можно определить из соотношений

$${}_{t+\Delta t}\mathbf{R} = {}_t\mathbf{R} + \Delta t {}_t\mathbf{v}^s$$

и

$${}_{t+\Delta t}\mathbf{R}^f = {}_t\mathbf{R} + \Delta t {}_t\mathbf{v}^f,$$

где ${}_t\mathbf{v}^s$ и ${}_t\mathbf{v}^f$ – скорости материальных частиц скелета грунта и жидкости, находящихся в момент времени t в положении M_1 текущей конфигурации ${}_t\Omega$. Различие положений материальных точек скелета грунта и фильтрующей жидкости можно выразить в виде

$$\Delta {}_{t+\Delta t}\mathbf{R}^f = {}_{t+\Delta t}\mathbf{R}^f - {}_{t+\Delta t}\mathbf{R} = \Delta t ({}_t\mathbf{v}^f - {}_t\mathbf{v}^s).$$

В дифференциалах это соотношение примет вид

$$d {}_{t+\Delta t}\mathbf{R}^f = dt ({}_t\mathbf{v}^f - {}_t\mathbf{v}^s).$$

Радиус-вектор ${}_t\mathbf{R}$ представим в виде разложения по ортам базиса $\mathbf{e}_i$:

$${}_t\mathbf{R} = x_i(t) \mathbf{e}_i.$$

В этом случае скорость материальной частицы скелета в момент времени t определится как

$${}_t\mathbf{v}^s = {}_t\dot{\mathbf{R}}.$$

2. Разрешающие уравнения

Напряженное состояние описывается тотальными напряжениями σ_{ij}^{tot} , причем согласно принципу напряжений Терцаги тотальные напряжения в грунте принимаются равными

$$\sigma_{ij}^{\text{tot}} = \sigma_{ij}^{\text{ef}} - \delta_{ij} P,$$

где P – давление в жидкой фазе, σ_{ij}^{ef} – эффективные напряжения в грунте.

Уравнение равновесия для грунта в целом имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{\text{tot}}}{\partial x_j} + \rho g \delta_{iz} = 0, \quad (1)$$

где $\rho = m \rho^f + (1 - m) \rho^s$ – осредненная плотность породы коллектора, $\mathbf{g} = g \mathbf{e}_z$ – ускорение свободного падения, x_i – глобальные декартовы координаты текущего (актуального) состояния, $\mathbf{e}_i$ – орты глобальной декартовой системы координат, индексы s и f соответствуют параметрам скелета грунта и жидкости, через m обозначается пористость.

Запишем вариационную форму уравнения равновесия (1) в следующем виде:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{\text{tot}} \delta d_{ij} d\Omega = \int_{S_{\sigma}} \sigma_i^* \delta v_i^s dS + \int_{\Omega} \delta_{iz} g \rho \delta v_i^s d\Omega, \quad (2)$$

где $d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i^s}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^s}{\partial x_i} \right)$ – деформации скорости частиц скелета грунта, σ_i^* – заданные величины тотальных напряжений на S_{σ} .

Линеаризовав уравнение (2), можно получить вариационное уравнение равновесия в скоростях напряжений

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\dot{\sigma}_{ij}^{\text{tot}} \delta d_{ij} + \sigma_{ij}^{\text{tot}} \delta \dot{d}_{ij} + \sigma_{ij}^{\text{tot}} \text{div} \mathbf{v}^s \delta v_i^s \right] d\Omega - \\ - \int_{\Omega} \rho \delta_{iz} g \text{div} \mathbf{v}^s \delta v_i^s d\Omega - \int_{S_{\sigma}} [\dot{\sigma}_i^* + \sigma_i^* \text{div} \mathbf{v}^s] \delta v_i^s dS = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения баланса масс запишем отдельно для каждой фазы грунта [14]. Для скелета грунта уравнение баланса масс примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ (1 - m) \rho^s \} + (1 - m) \rho^s \text{div} \mathbf{v}^s = 0. \quad (4)$$

Уравнения баланса масс для жидкой фазы примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ m \rho^f \} + m \rho^f \text{div} \mathbf{v}^s + \text{div} \{ m \rho^f (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) \} = 0. \quad (5)$$

Разделив уравнение баланса массы твердой фазы на ρ^s , преобразуем уравнение (4) к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} (1 - m) + (1 - m) \frac{1}{\rho^s} \frac{\partial \rho^s}{\partial t} + (1 - m) \text{div} \mathbf{v}^s = 0. \quad (6)$$

Аналогичные преобразования уравнения (5) приведут к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial t} + m \frac{1}{\rho^f} \frac{\partial \rho^f}{\partial t} + m \text{div} \mathbf{v}^s + \text{grad} m (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) + \\ + m \frac{\text{grad} \rho^f}{\rho^f} (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) + m \text{div} (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Складываем соотношения (6) и (7) и после некоторых преобразований получаем

$$(1-m)\frac{1}{\rho^s}\frac{\partial \rho^s}{\partial t} + m\frac{1}{\rho^f}\frac{\partial \rho^f}{\partial t} + m\frac{\text{grad } \rho^f}{\rho^f}(\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) + \\ + \text{div } \mathbf{v}^s + \text{div } \{m(\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s)\} = 0. \quad (8)$$

Уравнение состояния для материала твердой фазы имеет вид

$$\rho^s = \rho_0^s \left(1 - \frac{1}{3}\beta^s \sigma_{ij} \delta_{ij} - \alpha^s T \right), \quad (9)$$

где β^s и α^s – упругость и коэффициент температурного расширения минеральных частиц скелета грунта, T – отклонение температуры. Истинные напряжения в минеральных частицах грунта σ_{ij} определяются через поровое давление и эффективные напряжения из соотношения

$$\sigma_{ij}^{\text{ef}} = (1-m)(\sigma_{ij} + \delta_{ij}P). \quad (10)$$

Уравнение состояния для жидкой фазы имеет подобный вид

$$\rho^f = \rho_0^f (1 + \beta^f P - \alpha^f T), \quad (11)$$

где β^f и α^f – упругость и коэффициент температурного расширения жидкой фазы.

Запишем в скоростях определяющий закон для деформаций и эффективных напряжений

$$\dot{\sigma}_{ij}^{\text{ef}} = \left(K - \frac{2}{3}G \right) d_0 \delta_{ij} + 2G d_{ij} + \beta^s K \dot{P} \delta_{ij} - \alpha^s K \dot{T}, \quad (12)$$

который аналогичен закону термоупругости, и включает дополнительно линейный пороупругий эффект, где G – модуль сдвига грунта, K – модуль объемного расширения.

Уравнения (9)–(12) позволяют переписать уравнение (8) в виде

$$\{(1-m)\beta^s - K(\beta^s)^2\} \frac{\partial P}{\partial t} + m\beta^f \frac{\partial P}{\partial t} + m\frac{\text{grad } \rho^f}{\rho^f}(\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) + (1-K\beta^s) \text{div } \mathbf{v}^s + \\ + \text{div } \{m(\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s)\} - \alpha^s(1-m) \frac{\partial T}{\partial t} \left(1 + \frac{\beta^s K}{3(1-m)} \right) - \alpha^f m \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (13)$$

Грунты определяются условием малости отношения сжимаемостей

$$\beta^s K \ll 1,$$

вследствие чего уравнение (13) упростится

$$\{(1-m)\beta^s + m\beta^f\} \frac{\partial P}{\partial t} + m\frac{\text{grad } \rho^f}{\rho^f}(\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) + \\ + \text{div } \mathbf{v}^s + \text{div } \{m(\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s)\} - \{(1-m)\alpha^s + m\alpha^f\} \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (14)$$

Вводя осредненную упругость

$$m\beta^{sf} = (1-m)\beta^s + m\beta^f$$

и коэффициент теплового расширения

$$m\alpha^{sf} = (1-m)\alpha^s + m\alpha^f,$$

уравнение (14) можно упростить до вида

$$m\beta^{sf}\frac{\partial P}{\partial t} + m\frac{\text{grad}\rho^f}{\rho^f}(\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) + \text{div}\mathbf{v}^s + \text{div}\{m(\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s)\} - m\alpha^{sf}\frac{\partial T}{\partial t} = 0.$$

Закон фильтрации записывается по отношению к разности приведенных скоростей жидкости и скелета грунта в форме Дарси–Герсеванова:

$$m(\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) = -\frac{k}{\mu}(\text{grad}P - \rho^f\mathbf{g}). \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14), получим уравнение пьезопроводности

$$m\beta^{sf}\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\text{grad}\rho^f}{\rho^f}\frac{k}{\mu}(\text{grad}P - \rho^f\mathbf{g}) + \text{div}\mathbf{v}^s - \text{div}\left\{\frac{k}{\mu}(\text{grad}P - \rho^f\mathbf{g})\right\} - m\alpha^{sf}\frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (16)$$

Тогда вариационное уравнение пьезопроводности будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} m\beta^{sf}\frac{\partial P}{\partial t}\delta\dot{P}d\Omega - \int_{\Omega} \left[\frac{\text{grad}\rho^f}{\rho^f}\frac{k}{\mu}(\text{grad}P - \rho^f\mathbf{g})\right]\delta\dot{P}d\Omega + \\ + \int_{\Omega} \text{div}\mathbf{v}^s\delta\dot{P}d\Omega - \int_{S_H} q_n^*\delta\dot{P}dS - \int_{\Omega} \frac{k}{\mu}(\text{grad}P - \rho^f\mathbf{g})\text{div}(\delta\dot{P})d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где q_n^* – заданный градиент напора на S_H .

Считая отклонения температуры от начальной при термическом воздействии не слишком большими, будем предполагать справедливым закон теплопроводности Фурье. В предположении малости энергии диссипации при вязкопластическом деформировании уравнение теплопроводности для всего грунта в целом примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\{[(1-m)\rho^s c^s + m\rho^f c^f]T\} + \text{div}\{[(1-m)\rho^s c^s \mathbf{v}^s + m\rho^f c^f \mathbf{v}^f]T\} = \\ = \text{div}\{[(1-m)\lambda^s + m\lambda^f]\text{grad}T\}, \end{aligned}$$

где c^s , c^f и λ^s , λ^f – коэффициенты теплоемкости и теплопроводности скелета грунта и жидкости соответственно.

После некоторых преобразований из последнего уравнения можно получить уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t}\{cT\} + \text{div}\{c\mathbf{v}^s + m\rho^f c^f(\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s)\}T = \text{div}\{\lambda\text{grad}T\},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\{cT\} + \text{div}\{\mathbf{Q}T\} = \text{div}\{\lambda\text{grad}T\}, \quad (18)$$

где $c = (1-m)\rho^s c^s + m\rho^f c^f$ – средняя теплоемкость грунта, $\lambda = (1-m)\lambda^s + m\lambda^f$ – средняя теплопроводность грунта, $\mathbf{Q} = c\mathbf{v}^s + m\rho^f c^f(\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s)$.

Для определения параметра m используется уравнение

$$\dot{m} = (1-m)(\text{div}\mathbf{v}^s - \beta^s\dot{P} + \alpha^s\dot{T}).$$

3. Определяющие соотношения

Запишем уравнения состояния пористой упруго-вязко-пластической среды. Скорость деформаций можно представить в виде суммы девиаторной d'_{ij} и шаровой d_0 частей:

$$d_{ij} = d'_{ij} + \delta_{ij}d_0,$$

где

$$d_0 = d_{ii}, \quad d'_{ij} = d_{ij} - \delta_{ij}d_0.$$

Согласно принципу аддитивности деформаций запишем

$$d_{ij} = d_{ij}^e + d_{ij}^T + d_{ij}^p + d_{ij}^c,$$

где индексы e , T , p и c соответствуют параметрам упругого, температурного, пластического и вязкого состояний. Тогда подобные соотношения можно записать для девиаторной и шаровой частей тензора скоростей деформаций в виде

$$\begin{aligned} d'_{ij} &= d'^e_{ij} + d'^T_{ij} + d'^p_{ij} + d'^c_{ij}, \\ d_0 &= d_0^e + d_0^T + d_0^p + d_0^c. \end{aligned} \quad (19)$$

Будем считать, что соотношения для шаровых тензоров и девиаторов эффективных напряжений и деформации скорости независимы. В этом случае для упругих деформаций в случае изотропного грунта определяющие соотношения примут вид:

$$d_0^e = \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_0^{ef} - \frac{\beta^{sf}}{3} \dot{P}, \quad d'^e_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{\sigma}'^{ef}_{ij}, \quad (20)$$

где σ_0^{ef} – шаровая часть тензора эффективных напряжений, σ'^{ef}_{ij} – девиатор тензора эффективных напряжений.

Считая, что при изменении температуры будут изменяться только линейные деформации, для температурных деформаций имеем:

$$d_0^T = \frac{1}{3} \alpha^{sf} \dot{T}, \quad d'^T_{ij} = 0, \quad (21)$$

Для описания вязкого поведения пористой матрицы примем закон Кельвина – Фойгта, тогда для скоростей вязких деформаций можно записать

$$d_0^c = \frac{1}{3} \eta_0 \sigma_0^{ef}, \quad d'^c_{ij} = \eta \sigma'^{ef}_{ij}, \quad (22)$$

где η_0 и η – соответствующие коэффициенты вязкости.

В процессе моделирования грунтов [15, 16] вводят специальные характеристики прочности, которые определяют их несущую способность. К ним относятся сцепление c^* , которое характеризует прочность грунтовой среды на срез при отсутствии сжимающих напряжений; угол внутреннего трения φ^* , который характеризует повышение прочности на сдвиг при всестороннем сжатии; коэффициент дилатансии Λ , который характеризует разрыхление или уплотнение грунта при девиаторном нагружении. В этом случае соотношения для скоростей пластических деформаций можно записать в виде

$$d_0^p = \frac{2}{3} \Lambda (c^* - \sigma_0^{ef} \operatorname{tg} \varphi^*) \dot{\lambda}, \quad d'^p_{ij} = \dot{\lambda} \sigma'^{ef}_{ij}. \quad (23)$$

Условием возникновения предельного состояния будет являться соотношение

$$\sigma_\tau^{ef} = c^* - \sigma_0^{ef} \operatorname{tg} \varphi^*,$$

где

$$2(\sigma_{\tau}^{\text{ef}})^2 = \sigma_{mn}^{\prime\text{ef}} \sigma_{mn}^{\prime\text{ef}}.$$

Для принятой модели параметр $\dot{\lambda}$ определяется в виде

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{R} \left\{ \frac{\sigma_{mn}^{\prime\text{ef}}}{\sigma_{\tau}^{\text{ef}}} d'_{mn} + [3d_0 + \beta^s \dot{P} - \alpha_s \dot{T} - \eta_0 \sigma_0^{\text{ef}}] \frac{K}{G} \text{tg} \varphi^* - 2\eta \sigma_{\tau}^{\text{ef}} \right\},$$

где

$$R = 2\sigma_{\tau}^{\text{ef}} + 2(c^* - \sigma_0^{\text{ef}} \text{tg} \varphi^*) \Lambda \frac{K}{G} \text{tg} \varphi^*.$$

Используя соотношения (19)–(23) получим определяющие соотношения для скоростей эффективных напряжений:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{\prime\text{ef}} = 2G (d'_{ij} - \dot{\lambda} \sigma_{ij}^{\prime\text{ef}} - \eta \sigma_{ij}^{\prime\text{ef}}),$$

$$\dot{\sigma}_0^{\text{ef}} = K [3d_0 - \alpha^{sf} \dot{T} - \eta_0 \sigma_0^{\text{ef}} - 2\Lambda \dot{\lambda} (c^* - \sigma_0^{\text{ef}} \text{tg} \varphi^*)] + K \beta^{sf} \dot{P}.$$

Далее с помощью следующего соотношения определяем скорость тотальных напряжений

$$\dot{\sigma}_{ij}^{\text{tot}} = \dot{\sigma}_{ij}^{\text{ef}} - \delta_{ij} \dot{P},$$

которые фигурируют в уравнении (3).

Заключение

Таким образом, построена система разрешающих уравнений, описывающая процесс квазистатического деформирования пористых грунтовых сред сложной физической природы при фильтрации в них нефтеводяной смеси с учетом термического воздействия. Для описания процесса деформирования используется комбинированная лагранжево-эйлерова постановка. Связь между напряжениями в разных фазах определяется принципом напряжений Терцаги. Закон фильтрации записывается по отношению к разности приведенных скоростей жидкости и скелета грунта в форме Дарси – Герсегова.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 08-01-00546а).

Summary

D.V. Bereznoi, A.I. Golovanov, S.A. Malkin, L.U. Sultanov. Investigation of Deformation of Fluid-Saturated Media in Terms of Arbitrary Lagrangian-Eulerian Formulation of Motion. I. Kinematics and Resolving Equations.

The present article starts a series of papers devoted to the development of a numerical algorithm for researching nonisothermal deformation of fluid-saturated porous media. The first part discusses the principal regulations of two-phase media kinematics taking into account the arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation of motion and gives the basic set of resolving and determinative equations.

Key words: arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation, nonisothermic deformation, fluid-saturated porous media, viscoplasticity.

Литература

1. *Donea J., Fasoli-Stella P., Giuliani S.* Lagrangian and Eulerian finite element techniques for transient fluid-structure interaction problems // Trans. 4th Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology. V. B: Thermal and Fluid/Structure Dynamics Analysis / Eds. T.A. Jaeger, B.A. Boley. – Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1977. – Paper B1/2. – P. 1–12.
2. *Belytschko T., Kennedy J.M.* Computer models for subassembly simulation // Nucl. Engrg. Des. – 1978. – V. 49. – P. 17–38.
3. *Donea J.* Finite element analysis of transient dynamic fluid-structure interaction // Donea J. (ed.) Advanced Structural Dynamics. – London: Appl. Sci. Publ., 1980. – P. 255–290.
4. *Donea J.* Arbitrary Lagrangian Eulerian finite element methods // Belytschko T., Hughes T.J.R. (Eds.) Computer Methods for Transient Analysis. – Elsevier Sci. Publ., 1983. – P. 473–516.
5. *Hughes T.J.R., Liu W.K., Zimmermann T.K.* Lagrangian-Eulerian finite element formulation for viscous flows // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 1981. – V. 29. – P. 329–349.
6. *Liu W.K.* Finite element procedures for fluid-structure interactions and application to liquid storage tanks // Nucl. Engrg. Des. – 1981. – V. 65. – P. 221–238.
7. *Huerta A., Casadei F.* New ALE application in non-linear fast-transient solid dynamics // Engrg. Comput. – 1994. – V. 11. – P. 317–345.
8. *Belytschko T., Liu W.K., Moran B.* Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. – Chichester: John Wiley & Sons, 2000. – 650 p.
9. *Wall W.A.* Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen: Ph.D. Thesis. – Bericht des Instituts für Baustatik Nr. 31, Universität Stuttgart, 1999.
10. *Braess H., Wriggers P.* Arbitrary Lagrangian Eulerian finite element analysis for free surface flow // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2000. – V. 190. – P. 95–109.
11. *Rodriguez-Ferran A., Perez-Foguet A., Huerta A.* Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) formulation for hyperelastoplasticity // Int. J. Numer. Methods Engrg. – 2002. – V. 53. – P. 1831–1851.
12. *Donea J., Huerta A.* Finite Element Methods for Flow Problems. – Chichester, New York: John Wiley & Sons, 2003. – 350 p.
13. *Kuhl E., Hulshoff S., de Borst R.* An arbitrary Lagrangian Eulerian finite-element approach for fluid-structure interaction phenomena // Int. J. Numer. Methods Engrg. – 2003. – V. 57 – P. 117–142.
14. *Зарецкий Ю.К.* Лекции по современной механике грунтов. – Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1989. – 607 с.
15. *Терцаги К.* Теоретическая механика грунтов. – М.: Стройиздат, 1961. – 507 с.
16. *Николаевский В.Н.* Геомеханика и флюидодинамика. – М.: Недра, 1996. – 448 с.

Поступила в редакцию
23.12.09

Бережной Дмитрий Валерьевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Dmitri.Berezhnoi@ksu.ru*

Голованов Александр Иванович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики Казанского (Приволжского) федерального университета.

Малкин Сергей Александрович – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры теоретической механики Казанского (Приволжского) федерального университета.

Султанов Ленар Усманович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИИММ им. Н.Г. Чеботарева Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Lenar.Sultanov@ksu.ru*