УДК 371.30

ПРЕЕМСТВЕННОСТЬ ПЕРЕХОДА ОТ ДВУЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ К БЕСКОНЕЧНОЗНАЧНОЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ В ВОЕННОМ ВУЗЕ

Садовников Н.В.[1], Султанова Г.А.[2]

[1,2]*Филиал Военной академии материально-технического обеспечения имени генерала армии А.В. Хрулева, г. Пенза*

[1]sadovnikovnv@yandex.ru, [2] sultgaliya@yandex.ru

Аннотация

Разработан оригинальный подход к изучению элементов бесконечнозначной логики (БЛ) на основе преемственности введения основных операций (дизъюнкции, конъюнкции и отрицания) двузначной логики. В бесконечнозначной логике операция дизъюнкции аналогична выделению наибольшего элемента данного множества, конъюнкция – выделению наименьшего элемента, а отрицание – выделению симметричного элемента относительно серединного элемента (центра) данного множества.

Ключевые слова: *математическая логика, бесконечнозначная (многозначная) логика, порядковая логика, дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, булева функция, булева алгебра, функция бесконечнозначной логики (БЛ), алгебра БЛ, суперпозиция функций БЛ.*

Для построения основ бесконечной логики (БЛ) оттолкнемся от некоторых известных фактов из двузначной логики (ДЛ).

Введем на множестве из двух элементов $\{0,1\}$ обычные операции двузначной логики ДЛ:

конъюнкцию ДЛ: $x_1 \wedge x_2 = \begin{cases} 1, \text{если } x_1 = x_2 = 1, \\ 0, \text{в остальных случаях;} \end{cases}$ *(*1)

дизъюнкцию ДЛ: $x_1 \vee x_2 = \begin{cases} 0, \text{если } x_1 = x_2 = 0, \\ 1, \text{в остальных случаях;} \end{cases}$ (2)

отрицание ДЛ: $\overline{x} = \begin{cases} 1 \text{ при } x = 0, \\ 0 \text{ при } x = 1. \end{cases}$ (3)

Булевой функцией называется такая функция, которая совместно со своими аргументами принимает значения из множества $\{0,1\}$.

Множество всех булевых функций, рассматриваемых совместно с операциями конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, называется булевой алгеброй.

Булева алгебра играет важную роль в изучении работы многих систем, например, экономических, технических, вычислительных, управляющих и т.д. Однако сфера ее действия ограничена лишь изучением процессов, в которых какая-то величина принимает только два значения (для удобства берут обычно 0 или 1). В то же время большинство процессов, изучаемых в технике, экономике, управлении, могут принимать несколько (или даже множество) значений. Таковыми являются, например, процессы последовательного выполнения совокупности работ в различных системах, процессы прохождения сигнала через то или иное техническое устройство и т.д.

Для построения аналога булевой алгебры, пригодной для исследования вышеперечисленных процессов, следует обобщить двузначные логические операции (1) - (3) на случай, когда и переменные исходные величины, и результат операции принимают значения из бесконечного (возможно непрерывного) множества. Это будет означать переход от двузначной к бесконечнозначной логике (БЛ).

Чтобы получить нужное обобщение, посмотрим на операции (1) - (3) под другим углом зрения. При этом заметим следующее: операция (1) $\wedge$ означает выбор меньшего из двух двоичных чисел, операция (2) $\vee$ – выбор большего из этих чисел, а операция (3) – отрицание $(\bar{\ })$ означает замену имеющегося числа на симметричное ему относительно середины отрезка $[0,1]$.

Отталкиваясь от этих идей, введем в рассмотрение множество

$$C = [A, B] \tag{4}$$

– некоторый замкнутый и ограниченный интервал (отрезок) множества всех действительных чисел *R*. Этот интервал образует бесконечное множество чисел. Середине этого интервала соответствует точка

$$M = \frac{A+B}{2} \tag{5}$$

Далее будем действовать по аналогии с двузначной логикой на основе нового взгляда на известные операции. Тогда для любой пары чисел $a_1, a_2 \in C$ операция конъюнкции БЛ определяется следующим образом:

$$a_1 \wedge a_2 = \min(a_1, a_2), \tag{6}$$

а операция дизъюнкции БЛ – как

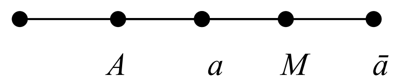
$$a_1 \vee a_2 = \max(a_1, a_2) \tag{7}$$

В определении (6) знак $\wedge$, когда это не ведет к недоразумению, будет опускаться (просто $a_1 a_2$ или $a_1 \cdot a_2$).

В случае более чем двух переменных обе операции определяются аналогично (например, $a_1 \vee a_2 \vee a_3 = \max(a_1, a_2, a_3)$).

Для любого числа $a \in C$ операция отрицания БЛ определяется следующим образом:

$$\bar{a} = 2M - a \tag{8}$$



Из (8) непосредствен… …чки *a* на числовой оси дает точку $\bar{a} \in C$, симметричную точке относительно точки *M*.

Операции конъюнкции БЛ и дизъюнкции БЛ остаются определенными согласно (6) и (7) и в тех случаях, когда интервал *C* незамкнут и неограничен, либо, когда *C* представляет собой произвольное дискретное (конечное или счетное) множество чисел. Для определения же операции отрицания БЛ, согласно (8), требование замкнутости и ограниченности интервала *C* существенно; если же *C* – дискретное множество чисел, то существенным является требование симметричности этого множества относительно имеющегося в нем центра (середины).

Функцией БЛ называется функция, которая совместно со своими аргументами принимает значения из множества $C = [A, B]$ и может выражаться через свои аргументы формулой в виде суперпозиции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания БЛ и, возможно, обычных алгебраических операций.

Множество всех функций БЛ, рассматриваемых совместно с операциями дизъюнкции БЛ, конъюнкции БЛ и отрицания БЛ (и, возможно, обычными алгебраическими операциями) называется алгеброй БЛ.

Пусть дана функция БЛ $b = f(a_1, a_2, ..., a_m)$, которая может быть выражена суперпозицией операций дизъюнкции БЛ, конъюнкции БЛ и отрицания БЛ над аргументами $a_1, a_2, ..., a_m$. Такая функция при любом наборе аргументов $(a_1, a_2, ..., a_m)$ принимает значение, равное одному из его аргументов a_i или его отрицания $\bar{a}_i$.

Действительно, операции дизъюнкции БЛ, конъюнкции БЛ и отрицания БЛ, суперпозицией которых представлено выражение функции, всегда имеет своим результатом одну из переменных, участвующих в операции, или ее отрицания (см. (6), (7), (8)).

Первичное задание функции БЛ $b = f(a_1, a_2, ..., a_m)$ в соответствии с вышесказанным будет состоять в перечислении всех m! вариантов упорядочения множества аргументов $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$ с указанием для каждого варианта того аргумента a_i или его отрицания $\overline{a}_i$, значение которого принимает функция.

Например, пусть функция БЛ от трех переменных задана таблицей 1.

Таблица 1

Функция БЛ от трех переменных

Упорядочение аргументов	Значение функции
$a_1 \le a_2 \le a_3$	a_3
$a_1 \le a_3 \le a_2$	a_3
$a_2 \le a_1 \le a_3$	a_3
$a_2 \le a_3 \le a_1$	a_3
$a_3 \le a_1 \le a_2$	a_1
$a_3 \le a_2 \le a_1$	a_2

Найдем аналитическое представление этой функции, т.е. представим в виде суперпозиции дизъюнкции БЛ, конъюнкции БЛ и отрицания БЛ.

Методика аналитического представления функции БЛ основана на последовательном объединении вариантов упорядочения множества аргументов с помощью операций БЛ.

Согласно таблице 1 искомую функцию можно представить в виде:

$$b = f(a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} a_1 \text{ при } a_1 < a_2 \text{ и } a_3 \le a_1, \text{(из строки 5)} \\ a_2 \text{ при } a_2 < a_1 \text{ и } a_3 \le a_2, \text{(из строки 6)} \\ a_3 \text{ при } a_3 \ge a_1 a_2 \text{ (по смыслу конъюнкции БЛ,} \\ \qquad \text{сопоставляя строки 1 - 4).} \end{cases}$$

Используя операцию конъюнкции БЛ, объединим первые две строки предыдущего представления в одну:

$$b = f(a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} a_1 \cdot a_2 \text{ при } a_3 \le a_1 a_2, \\ a_3 \text{ при } a_3 \ge a_1 a_2. \end{cases}$$

Объединив теперь обе строки в одну с помощью дизъюнкции БЛ, получим искомое аналитическое представление:

$$b = f(a_1, a_2, a_3) = a_1 \cdot a_2 \vee a_3.$$

Для закрепления умения аналитического представления таблично заданной функции БЛ от трех переменных можно предложить курсантам аналогичные задания с другими значениями функции в таблице 1. Упорядочение аргументов остается без изменения (3! вариантов, т.е. 6).

Можно ограничиться функциями БЛ трех аргументов, т.к. увеличение числа аргументов даже до 4, приведет к значительному увеличению числа вариантов их упорядочения до 24, что намного усложнит задачу аналитического представления такой функции БЛ.

Такой нам видится методика перехода от двузначной логики к бесконечнозначной при изучении элементов математической логики в курсе математики или в курсе информатики военного вуза. Она использует преемственность на основе аналогии при введении основных операций: конъюнкции, дизъюнкции и отрицания в двузначной и в бесконечнозначной логике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Садовников, Н.В.* Методическая подготовка учителя математики в педвузе в контексте фундаментализации образования: Монография. – Пенза: ПГПУ, 2005. – 283 с.

CONTINUITY OF THE TRANSITION FROM TWO-VALUED TO INFINITE-VALUED LOGIC IN THE STUDY OF MATHEMATICAL LOGIC IN A MILITARY UNIVERSITY

Nikolay Sadovnikov[1], Galiya Sultanova[2]

[1,2]*Federal State-Owned "Logistic Military Educational Institution named after general A.V. Khrulov" of the Ministry of Defence of the Russian Federation, Penza*

[1]sadovnikovnv@yandex.ru, [2] sultgaliya@yandex.ru

Abstract

An original approach to the study of the elements of infinite-valued logic has been developed based on the continuity of the introduction of the main operations (disjunction, conjunction and negation) of two-valued logic. In infinite-valued logic,

the operation of disjunction is similar to selecting the largest element of a given set, conjunction is to select the smallest element, and negation is to select a symmetrical element with respect to the middle element (center) of the given set.

Keywords: *mathematical logic, infinite-valued (many-valued) logic, ordinal logic, disjunction, conjunction, negation, Boolean function, Boolean algebra, function of infinite-valued logic, algebra of infinite-valued logic, superposition of functions of infinite-valued logic.*

REFERENCES

1. Sadovnikov N. V. Metodicheskaya podgotovka uchitelys matematiki v pedvuze v kontekste fundamentalizacii obrazovaniya. Penza: PGPU, 2005. – 283 pp.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

САДОВНИКОВ Николай Владимирович – д.п.н., профессор, филиал ВА МТО им. генерала армии А.В. Хрулева, г. Пенза)

Nikolay Vladimirovich SADOVNIKOV – doctor of pedagogical sciences, professor, Federal State-Owned “Logistic Military Educational Institution named after general A.V. Khrulov” of the Ministry of Defence of the Russian Federation, Penza

email: sadovnikovnv@yandex.ru

СУЛТАНОВА Галия Алиевна – к.ф.-м.н., старший преподаватель, филиал ВА МТО им. генерала армии А.В. Хрулева, г. Пенза)

Galiya Alievna SULTANOVA – candidate of physical and matematical sciences, teacher, Federal State-Owned “Logistic Military Educational Institution named after general A.V. Khrulov” of the Ministry of Defence of the Russian Federation, Penza

email: sultgaliya@yandex.ru

Материал поступил в редакцию 4 февраля 2022 года