Том II, с. 382–385

УДК: 533.951.2 + 535.012.2

ИНВАРИАНТНАЯ ФОРМА ТЕНЗОРА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ХОЛОДНОЙ ИОНОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЫ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

А. П. Потехин, Н. В. Ильин

ФГБУН Институт Солнечно Земной физики Сибирского отделения Российской академии наук, 634033, г.Иркутск, Лермонтова, 126А, а/я 291

E-mail: uzel@iszf.irk.ru

Аннотация. Рассмотрено решение задачи движения классической нерелятивистской заряженной частицы под действием электрического поля при наличии внешнего магнитного поля. Приведено выражение во временной области для тензора диэлектрической проницаемости ионосферной холодной плазмы в геомагнитном поле.

Ключевые слова: ионосфера, распространение радиоволн, тензор диэлектрической проницаемости плазмы

INVARIANT FORM OF DIELECTRIC PERMITTIVITY TENSOR OF THE COLD IONOSPHERIC PLASMA IN THE TIME DOMAIN

A. P. Potekhin, N. V. Ilyin

Abstract. Considered the solution of the problem of the movement of classical charged particle under the action of electric field in the presence of an external magnetic field. The permittivity tensor of the ionospheric cold plasma in the geomagnetic field is presented in the time domain.

Keywords: ionosphere, radio wave propagation, plasmas permittivity tensor

Введение

Распространение радиоволн в холодной магнитоактивной плазме, ионосфере, одно из важных направлений в проблематике распространения волн в неоднородных анизотропных средах, таких как плазма, анизотропная оптика, кристаллооптика и др.

В теории распространения электромагнитных волн в неоднородной магнитоактивной плазме, которая имеет уже длительную историю, ряд задач получили существенное развитие: распространение в слоистой среде [1] квазиизотропное приближение геометрической оптики в слабозамагниченной среде [2], линейное взаимодействие собственных волн в плавно неоднородной среде [3, 4]. Решение этих задач главным образом опираются на нахождение собственных (нормальных) волн в плавно неоднородной среде, которые дают геометрооптическое приближение в области его применимости.

Однако, в волноводах за счет многократных переотражений, волна приобретает «продольную» компоненту и уравнение распространения не сводится к скалярному, необходимо рассматривать все компоненты векторного поля. В некоторых случаях удается свести решение векторной задачи к двум скалярным: так называемым *Те* и *Тм* волнам. В общем же случае требуется дальнейшее развитие теории, так как многие задачи, в том числе востребованные практикой, еще требуют своего решения. Например, для слоистой модели волновода земля – ионосфера, задачи распространения радиоволн КВ диапазона решаются только для некоторых моделей геомагнитного поля: при распространении строго вдоль или строго поперек магнитного поля.

На реальных коротковолновых трассах большой протяженности геомагнитное поле направлено под самыми различными углами к направлению распространения на различных участках трассы. Формально говоря, можно ввести сопутствующую систему координат, в которой магнитное поле направлено по одной из осей, разложить в точке поле на независимые поляризационные компоненты и ввести матрицу перехода из сопутствующей системы координат к естественным координатам. При этом матрица перехода становится зависящей от координат, и уравнение распространения изменяется, появляются производные от матрицы перехода.

Система уравнений остается связанной и ее решение, в случае если матрица системы не коммутирует с ее интегралом, не записывается в виде экспоненты от интеграла от матрицы системы [5].

Данная ситуация и реализуется в ионосферном распространении декаметровых радиоволн. Хотя в каждой точке можно диагонализовать тензор диэлектрической проницаемости, но невозможно сделать это во всем пространстве, в котором распространяются радиоволны. При этом в волноводе как правило существует выделенная система координат, в которой среда описывается наиболее просто, поэтому для тензора диэлектрической проницаемости желательно иметь выражение, инвариантное по форме.

Модель среды

Анизотропия плазмы приводит к тому, что напряженность электрического поля E и его индукция D не коллинеарны. Материальное уравнение, связывающее напряженность с индукцией в общем случае имеют вид:

$$\vec{D}(t,\vec{r}) = \int_{-\infty}^{t} \iiint_V \hat{\varepsilon}(t,t',\vec{r},\vec{r'})E(t',\vec{r'})d\vec{r'}dt'. \tag{1}$$

В пренебрежении пространственной дисперсией, матрица «диэлектрической проницаемости» $\hat{\varepsilon}$ становится пропорциональна δ(r-r') и интеграл по пространству снимается.

$$\vec{D}(t,\vec{r}) = \int_{-\infty}^{t} \hat{\varepsilon}(t,t',\vec{r})E(t',\vec{r})dt'. \tag{2}$$

В предположении стационарности среды, электромагнитная функция отклика зависит только от разности *t-t'*. Отличие матрицы $\hat{\varepsilon}$ от единичной матрицы обусловлено тем, что на заряды среды действует не только поле E, но и сила Лоренца со стороны внешнего магнитного поля. Вследствие этого вектор поляризации направлен в сторону, отличную от электрического поля. Обычно, выбрав направление одной из осей координат вдоль внешнего магнитного поля, матрицу $\hat{\varepsilon}$ удается диагонализовать, при этом волновое уравнение для поля или потенциала удается расщепить на независимые уравнения, описывающие собственные поляризационные состояния среды. Если же внешнее магнитное поле меняется в пространстве (неоднородно), то диагонализация также начинает зависеть от координат, и в общем случае волновое уравнение не удается разрешить в явном виде.

Для моделирования тензорной структуры $\hat{\varepsilon}$ можно рассмотреть элементарную теорию, движение заряда вблизи положения равновесия под действием электрического поля [1].

Будем искать решение в инвариантной форме, не зависящей от выбора системы координат.

Уравнение движения осциллятора в магнитном поле, при наличии внешнего электрического поля имеет вид:

$$m\ddot{\vec{r}} + \hat{\omega}^2\vec{r} = \frac{e}{c}\dot{\vec{r}} \times \vec{B} + e\vec{E}, \quad \ddot{r}_i - \omega_H A_{ik}\dot{r}_k + \hat{\omega}^2{}_{ik}r_k = \frac{e}{m}E_i(t). \tag{3}$$

Здесь $\hat{\omega}$ – матрица частот, если частота единственная, матрица кратна единичной и равна ωI.

В отсутствие правой части, уравнение движения осциллятора имеет известное решение $\mathbf{r} = \cos(\hat{\omega}t)\mathbf{r}_0 + \hat{\omega}^{-1}\sin(\hat{\omega}t)\dot{\mathbf{r}}_0$, по форме не отличающееся от скалярного, если матрица частот постоянна. Если матрица частот непостоянна, уже скалярное уравнение не решается в общем виде, хотя параметрические колебания и исследовались достаточно широко. Преобразуем уравнение, полагая матрицу частот кратной единичной, к каноническому виду. Стандартным преобразованием убираем первые производные, то есть, заменив $r = uv$, найдем матрицу ***u*** такую, чтобы коэффициент при первых производных обратился в ноль.

$$\ddot{v} + \Omega^2 v = u^{-1}\frac{e}{m}\mathbf{E}, u = e^{\frac{\omega_H}{2}At}$$

$$\Omega^2 = \omega^2 I - \frac{\omega^2{}_H}{4}A^2 = \omega^2 I + \frac{\omega^2{}_H}{4}(I - P_B) = (\omega^2 + \frac{\omega^2{}_H}{4})(I - P_B) + \omega^2 P_B \tag{4}$$

Матрица частот изменилась, в плоскости перпендикулярной магнитному полю квадрат частоты стал $\omega^2 + \frac{\omega^2{}_H}{4}$, а в направлении магнитного поля остался тем же.

Квадратный корень из матрицы частот в данном случае легко извлекается,

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 + \frac{\omega^2{}_H}{4}}(I - P_B) + \omega P_B$$

и решение однородного уравнения имеет стандартный вид

$$v = \cos(\Omega t)v_0 - \Omega^{-1}\sin(\Omega t)v_1 = \cos(\omega_1 t)P_\perp v_0 - \tfrac{1}{\omega_1}\sin(\omega_1 t)P_\perp v_1 + \cos(\omega t)P_H v_0 - \tfrac{1}{\omega}\sin(\omega t)P_H v_1$$
$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 + \tfrac{\omega^2{}_H}{4}} .$$

$P_\perp = I - P_B$ матрица проектирования на плоскость, перпендикулярную магнитному полю, v_1 – начальная скорость частицы.

Неоднородное уравнение

$$\ddot{v} + \Omega^2 v = u^{-1}\frac{e}{m}\mathbf{E} \tag{5}$$

будем решать методом вариации постоянных в матричной форме.

Обычным способом получим систему уравнений

$$\begin{cases} \Omega\sin(\Omega t)\dot{v}_0(t) + \cos(\Omega t)\dot{v}_1(t) = u^{-1}\frac{e}{m}\mathbf{E} \\ \cos(\Omega t)\dot{v}_0(t) - \Omega^{-1}\sin(\Omega t)\dot{v}_1(t) = 0 \end{cases}$$

Решая которую получим

$$\begin{cases} v_0(t) = v_0(0) + \int_0^t \sin(\Omega t')\Omega^{-1}u^{-1}\frac{e}{m}\mathbf{E}(t')dt' \\ v_1(t) = v_1(0) + \int_0^t \cos(\Omega t')u^{-1}\frac{e}{m}\mathbf{E}(t')dt' \end{cases}$$

Решение исходной системы при этом примет вид:

$$\begin{gathered}\mathbf{r} = u(t)v(t) = \\ u(t)\left\{\cos(\Omega t)v_0(t) - \Omega^{-1}\sin(\Omega t)v_1(t)\right\} = \\ u(t)\cos(\Omega t)(v_0(0) + \int_0^t \sin(\Omega t')\Omega^{-1}u^{-1}\frac{e}{m}\mathbf{E}(t')dt') - \\ \Omega^{-1}\sin(\Omega t)(v_1(0) + \int_0^t \cos(\Omega t')u^{-1}\frac{e}{m}\mathbf{E}(t')dt') = \\ u(t)\left(\cos(\Omega t)v_0(0) - \Omega^{-1}\sin(\Omega t)v_1(0)\right) + \int_0^t \Omega^{-1}\sin(\Omega(t - t')u(t - t')\frac{e}{m}\mathbf{E}(t')dt'\end{gathered}$$

Здесь учтено, что матрицы u(t) и Ωкоммутируют друг с другом, а также с функциями Ω, и

$$u^{-1}(t) = u(-t) = e^{-\frac{\omega_H}{2}At} = \cos(\frac{\omega_H}{2}t)P_\perp - \sin(\frac{\omega_H}{2}t)A + P_B.$$

Обозначим

$$\mathbf{E}_1 = P_\perp\mathbf{E}(t),\ \mathbf{E}_2 = A\mathbf{E}(t),$$

и введем

$$\mathbf{E}_+ = \mathbf{E}_1(t) + i\mathbf{E}_2(t); \mathbf{E}_- = \mathbf{E}_1(t) - i\mathbf{E}_2(t).$$

В этих обозначениях смещение осциллятора под действием поля $\mathbf{E}$ будет иметь вид

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2\omega_1}\frac{e}{m}\int_0^t \sin\omega_1(t-t')\exp(-i\frac{\omega_H}{2}(t-t'))\mathbf{E}_+(t')dt' - \\ \frac{1}{2\omega_1}\frac{e}{m}\int_0^t \sin\omega_1(t-t')\exp(i\frac{\omega_H}{2}(t-t'))\mathbf{E}_-(t')dt' + \frac{1}{\omega}\frac{e}{m}\int_0^t \sin\omega(t-t')P_B\mathbf{E}(t')dt'$$

Поляризация объема среды, по определению есть $P = \sum_i q_i r_i$, сумма по всем заряженным частицам. В нашем случае нужно полученное смещение под действием приложенного поля умножить на концентрацию частиц данного сорта и просуммировать по сортам. Сорта частиц отличаются только массами и зарядами. Таким образом, поляризация единицы объема в точке *r*, обусловленная электронами

$$\begin{array}{l} P(r,t) = \frac{N(r,t)}{2\omega_1}\frac{e}{m}\int_0^t \sin\omega_1(t-t')\exp(-i\frac{\omega_H}{2}(t-t'))\mathbf{E}_+(t')dt' - \\ \frac{N(r,t)}{2\omega_1}\frac{e}{m}\int_0^t \sin\omega_1(t-t')\exp(i\frac{\omega_H}{2}(t-t'))\mathbf{E}_-(t')dt' + \\ \frac{N(r,t)}{\omega}\frac{e}{m}\int_0^t \sin\omega(t-t')P_B\mathbf{E}(t')dt'\} \end{array} . \qquad (6)$$

Здесь $N(r,t)$- плотность электронов в заданной точке пространства. Первое слагаемое – компонента поляризации в плоскости электрического и геомагнитного поля, перпендикулярная магнитному полю, второе слагаемое, компонента поляризации, перпендикулярная и геомагнитному и электрическому полю, третье – компонента в направлении геомагнитного поля. Индукция при этом

$$\mathbf{D}(r,t) = \mathbf{E}(r,t) + 4\pi\mathbf{P}(r,t) = \int_0^t \hat{\varepsilon}(r,t-t')E(r,t')dt'.$$

Заключение

В «элементарной» модели рассмотрена тензорная структура диэлектрической проницаемости холодной ионосферной плазмы. Выражения приведены для бесстолкновительного случая. Учет столкновений изменит матрицу частот осциллятора и сделает выражение сложнее. Полученное выражение имеет инвариантную форму, то есть не зависит от выбора системы координат и в однородном случае может быть приведено к известному выражению [1]. Но полученное выражение легко допускает обобщение на нестационарное (по величине) магнитное поле и справедливо для произвольной зависимости электрического поля от времени, учитывая все переходные процессы.

Работа выполнена в рамках базового финансирования программы ФНИ II.12 и при поддержке гранта РФФИ № 19-02-00513-а.

Список литературы

1. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. – М.: Наука, 1967. – 685с.
2. Кравцов Ю.А. «Квазиизотропное» приближение геометрической оптики // Докл. АН СССР. — 1968. – Т. 183, № 2. – С. 74–76.
3. Железняков В.В., Кочаровский В.В., Кочаровский Вл.В. Линейное взаимодействие электромагнитных волн в неоднородных слабо анизотропных средах // Успехи физических наук. – 1983. – Т. 141, № 2. – С. 295–298
4. Шалашов А.Г, Господчиков Е.Д. Импедансный метод решения задач распространения электромагнитных волн в анизотропных и гиротропных средах // Успехи физических наук. – 2011. – Т.181, № 2. – С. 151–172.
5. Лаппо-Данилевский И.А. Теория функций от матриц и системы линейных дифференциальных уравнений. – М.: ОНТИ. Гос. технико-теорет. изд-во, 1934. – 144 с.