УДК 517.53/55

О ВЕКТОРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Е.В. Семенко[1], Т.И. Семенко[2]

1 *semenko54@gmail.com*; Новосибирский государственный технический университет, Новосибирский государственный педагогический университет
2 *semenko_ti@mail.ru*; Новосибирский государственный технический университет, Новосибирский государственный педагогический университет

В статье обсуждается ранее практически не рассматривавшаяся векторная краевая задача линейного сопряжения (векторная задача Римана) на римановой поверхности. Показано, что любую векторную краевую задачу Римана на римановой поверхности можно свести к последовательному решению хорошо изученных одномерных задач Римана.

Ключевые слова: риманова поверхность, векторная краевая задача линейного сопряжения.

На компактной римановой поверхности D рода $\rho > 0$ рассмотрим векторную краевую задачу Римана (задачу линейного сопряжения)

$$f^+(t) = G(t)f^-(t) + g(t), \quad t \in L, \tag{1}$$

где $L \subset D$ – гладкий контур на D (не обязательно связный), разбивающий D на две связные части $D^\pm$, причем ориентация L согласована с D^+; $f^\pm(t)$ – соответствующие граничные значения на L аналитического в $D^\pm$ n-мерного вектора $f(z)$; $G(t)$ – невырожденная ($\det G(t) \neq 0$) гельдерова $(n \times n)$ матрица на L, называемая матрицей коэффициентов краевого условия; $g(t)$ – гельдерова n-мерная вектор-функция на L (правая часть).

Эта задача исчерпывающим образом изучена на плоскости, т.е. на римановой сфере ($\rho = 0$), см. например [1], а в одномерном ($n = 1$) случае хорошо исследована и на римановой поверхности любого рода, см. например [2], [3]. Однако векторные краевые задачи на римановой поверхности рода $\rho > 0$ практически не исследовались.

Будем рассматривать как аналитические, так и мероморфные решения задачи (1). Напомним (см. например [1]), что вектор $f(z) = (f_1(z), \dots, f_n(z))^T$ называется аналитическим/мероморфным в $D^\pm$, если его координаты $f_j(z)$, $j = \overline{1,n}$ аналитичны/мероморфны в $D^\pm$. При этом точка z_0 называется полюсом вектора $f(z)$, если она является полюсом хотя бы одной его координаты, и порядком полюса будет максимальный порядок полюса по всем координатам. Аналогично точка z_0 будет нулем вектора, если все его координаты обращаются в этой точке в нуль, и порядок нуля есть минимальный порядок нуля по координатам. Обычным образом определяется дивизор вектора и кратность вектора заданному дивизору.

Как обычно в задаче Римана, назовем коэффициенты $G_1(t)$ и $G_2(t)$ эквивалентными, если $G_2(t) = X^+(t)G_1(t)(X^-(t))^{-1}$, где $X^\pm(t)$ – граничные значения на L матрицы $X(z)$, невырожденной ($\det X(z) \neq 0$) и аналитической в $D^\pm$. Решения задач сопряжения

$$f_j^+(t) = G_j(t)f_j^-(t) + g_j(t), \quad j = \overline{1,2}; \quad g_1(t) = X^+(t)g_2(t),$$

очевидно связаны соотношением $f_2(z) = X(z)f_1(z)$. В частности, аналитические решения задач имеют одинаковые нули, а мероморфные – одинаковые нули и полюса. Таким образом, существенным этапом решения задачи (1) является классификация матриц коэффициентов $G(t)$ с точностью до эквивалентности.

Итак, рассмотрим далее только однородные ($g(t) \equiv 0$) задачи сопряжения. Аналогично задачам на плоскости, для решения задач на римановой поверхности вводится так называемое ядро Коши $K_0(p,q)$ – это абелев дифференциал по p, кратный $r_1 \cdots r_\rho r_0^{-1} q^{-1}$ с вычетами единица в q и минус единица в r_0 и мероморфная функция по q, кратная $p^{-1} r_0 r_1^{-1} \cdots r_\rho^{-1}$. Здесь $\Delta_0 = r_1 \cdots r_\rho r_0^{-1}$ – минимальный дивизор, т.е. не существует абелевых дифференциалов, кратных Δ, и мероморфных функций, кратных Δ^{-1}. Ядро Коши $K_0(p,q)$ есть прямой аналог выражения $dp/(p-q)$ на плоскости. Его построение и свойства см., например, в [2]. В частности, с помощью ядра Коши для любой точки $q \notin L$ можно построить аналитические в $D^\pm$ функции $\psi^\pm(z) = \psi^\pm(q \mid z)$, имеющие единственный простой нуль в точке $z = q$ [2]. Пусть далее $\psi(q \mid t) = \psi^+(q \mid t)/\psi^-(q \mid t)$, $t \in L$. Для дивизора $\Delta = p_1 \cdots p_s (q_1)^{-1} \cdots (q_m)^{-1}$ положим

$$\psi(\Delta \mid z) = \prod_{j=1}^{s} \psi(p_j \mid z) \cdot \prod_{j=1}^{m} (\psi(q_j \mid z))^{-1}, \quad \psi(\Delta \mid t) = \prod_{j=1}^{s} \psi(p_j \mid t) \cdot \prod_{j=1}^{m} (\psi(q_j \mid t))^{-1}.$$

Очевидно, что вектор $f(z)$ есть решение однородной задачи $f^+(t) = G(t)f^-(t)$, кратное дивизору Δ тогда и только тогда, когда $f_0(z) = f(z)/\psi(\Delta \mid z)$ есть аналитическое решение задачи $f_0^+(t) = G_0(t)f_0^-(t)$, $G_0(t) = G(t)/\psi(\Delta \mid t)$.

С помощью указанного ядра Коши и введенных функций $\psi(\Delta \mid z)$ можно, полностью повторяя и лишь слегка модифицируя рассуждения для задач на плоскости [1], доказать следующие утверждения:

1. Однородная краевая задача $f^+(t) = G(t)f^-(t)$ в классе функций, кратных дивизору Δ, сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма на L (далее – система Фредгольма). В свою очередь система уравнений, сопряженная к системе Фредгольма (т.е. задающая условия разрешимости системы Фредгольма), сводится к однородной краевой задаче в классе функций, кратных дивизору Δ^{-1} (так называемая союзная задача).

2. Порядок дивизора любого мероморфного решения однородной задачи не превосходить константы $m = m(G,\rho)$, т.е. в частности если $\deg\Delta > m(G,\rho)$, то ненулевых решений соответствующей системы Фредгольма не существует. То же относится к решениям союзной задачи, т.е. к решениям сопряженной системы Фредгольма или к условиям разрешимости, когда $\deg\Delta^{-1} > m_1$, т.е. $\deg\Delta < -m_1$.

3. Если степень дивизора Δ достаточно мала, $\deg\Delta < -m_2$, то существуют n линейно независимых мероморфных решений однородной задачи $f_1(z), \ldots, f_n(z)$, кратных Δ. Линейная независимость означает, что если из $f_j(z)$, $j = \overline{1,n}$, как из столбцов, составить матрицу $\Phi(z) = (f_1(z) \cdots f_n(z))$, то $\det\Phi(z) \not\equiv 0$.

Таким образом, на римановой поверхности всегда можно построить мероморфное матричное решение однородной задачи (1), т.е. построить мероморфную в $D^\pm$ матрицу $\Phi(z) = \Phi^\pm(z)$, не вырожденную тождественно ($\det\Phi(z) \not\equiv 0$) и такую, что

$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t),\ t \in L$. Пусть $\Delta_j = (f_j),\ j = \overline{1,n}$ – дивизоры столбцов матрицы Φ, а Δ – дивизор $\det \Phi(z)$. Очевидно, дивизор Δ кратен произведению Δ_j, но, вообще говоря, не равен ему, поскольку у определителя матрицы Φ могут быть нули, не являющиеся нулями какого-либо столбца.

Напомним, что на плоскости $(\rho = 0)$ любой дивизор нулевой степени – главный, т.е. является дивизором мероморфной функции, что позволяет, с помощью умножения на мероморфные функции, свести все дивизоры решений в одну точку, т.е. взять их в виде $(f_j) = \Delta_j = q_0^{\kappa_j}$, $q_0 \notin L$. В таком случае нетрудно показать (см. [1]), что можно построить мероморфное матричное решение так, что дивизор его определителя будет равен произведению дивизоров столбцов, что, в свою очередь, позволяет с точностью до эквивалентности, считать матрицу коэффициентов диагональной

$$G(t) = \begin{pmatrix} \psi_0^{\kappa_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \psi_0^{\kappa_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \psi_0^{\kappa_n} \end{pmatrix} \qquad \psi_0(t) = \psi(q_0 \mid t),$$

т.е. с точностью до эквивалентности коэффициент краевого условия задается степенями κ_j, $j = \overline{1,n}$, называемыми частными индексами матрицы $G(t)$, а задача (1) сводится к решению n одномерных задач, никак не связанных друг с другом.

На римановы поверхности положительного рода такое построение не переносится, однако, по сути повторяя рассуждения [1] на плоскости, можем свести матрицу коэффициентов к треугольной. Действительно, пусть $\Delta_j = (f_j)$, $j = \overline{1,n}$, тогда представим

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) \cdot \begin{pmatrix} \psi_1(z) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \psi_2(z) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \psi_n(z) \end{pmatrix} \qquad \psi_j = \psi(\Delta_j \mid z), \quad j = \overline{1,n},$$

т.е. разделим каждый столбец f_j матрицы Φ на функцию ψ_j, имеющую те же нули и полюса. Тогда столбцы матрицы $\Phi_0(z)$ будут аналитичны в $D^\pm$ и не будут иметь нулей. Однако останутся нули определителя матрицы Φ, не совпадающие с нулями столбцов, т.е. дивизором нулей матрицы Φ_0 будет $\Delta_0 = \Delta/(\prod \Delta_j)$. Пусть определитель $\Phi_0(z)$ обращается в нуль в точке p_0. Это означает, что к некоторому столбцу $f_s(z)$ можно прибавить линейную комбинацию столбцов с меньшими номерами

$$f_s \to f_s + \sum_{j=1}^{s-1} \alpha_j f_j,$$

так, что новый столбец будет в точке p_0 иметь нуль, и его можно будет разделить на

$\psi(p_0 \mid z)$. В терминах матриц это означает, что

$$\Phi_0(z) = \Phi_1(z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \psi(p_0 \mid z) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{s-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \Phi_1(z) H_1(z),$$

где $H_1(z)$ – верхняя треугольная матрица, а определитель Φ_1 имеет те же нули, что и определитель Φ_0, кроме p_0. Продолжая аналогично, в итоге придем к представлению $\Phi^{\pm}(z) = X^{\pm}(z) H^{\pm}(z)$, где $X^{\pm}(z)$ аналитичны и невырожденны в $D^{\pm}$, а матрицы $H^{\pm}(z)$ верхние треугольные. Но поскольку $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t)$, то получим представление

$$X^+(t)H^+(t) = G(t)X^-(t)H^-(t) \text{ или } G(t) = X^+(t)G_0(t)(X^-(t))^{-1},$$

где $X^{\pm}(z)$ аналитичны и невырожденны в $D^{\pm}$, а $G_0(t) = H^+(t)(H^-(t))^{-1}$ – верхняя треугольная матрица. Таким образом, краевая задача (1) с точностью до эквивалентности сводится к задаче с верхней треугольной матрицей коэффициентов. Однако, краевые задачи с верхней треугольной матрицей решаются последовательно "снизу вверх" , т.е. сводятся к последовательному решению одномерных краевых задач сопряжения.

Литература

1. Векуа Н. П. *Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи.* – М.: Гостехиздат, 1950. – 252 с.

2. Монахов В. Н., Семенко Е. В. *Краевые задачи и псевдодифференциальные операторы на римановых поверхностях.* – М.: Физматлит, 2003. – 415 с.

3. Семенко Е. В. *Представление дифференциалов Прима как решений краевых задач на римановых поверхностях* // Сиб. матем. журн. – 2016. – Т. 57. – № 1. – С. 157–170.

ON THE VECTOR BOUNDARY VALUE RIEMANN PROBLEM ON RIEMANN SURFACE

E.V. Semenko, T.I. Semenko

The vector boundary value problem of linear conjugation (vector Riemann problem), that almost haven't been investigated before, is considered. It is shown that each vector boundary value Riemann problem can be reduced to consequent solution of well studied one-dimensional Riemann problems.

Keywords: Riemann surface, vector boundary value problem of linear conjugation.