УДК 517.5

СПЛАЙНЫ ПО ТРЕХТОЧЕЧНЫМ РАЦИОНАЛЬНЫМ ИНТЕРПОЛЯНТАМ

А.-Р.К. Рамазанов[1], В.Г. Магомедова[2]

1 *ar-ramazanov@rambler.ru*; Дагестанский государственный университет, Дагестанский научный центр РАН
2 *vazipat@rambler.ru*; Дагестанский государственный университет

Для непрерывных и непрерывно дифференцируемых (до второго порядка) функций получены оценки скорости сходимости сплайнов по трехточечным рациональным интерполянтам, выражающиеся через модуль непрерывности и модуль изменения.

Ключевые слова: сплайны, интерполяционные сплайны, рациональные сплайны.

Для сетки узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 2)$ положим $h_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, $\Delta_i = \max\{h_{i-1}, h_i, h_{i+1}\}$ $(i = 2, 3, \ldots, N-1)$, $\Delta_1 = \max\{h_1, h_2\}$, $\Delta_N = \max\{h_{N-1}, h_N\}$, $\|\Delta\| = \max\{h_i | i = 1, 2, \ldots, N\}$.

Для $f \in C_{[a,b]}$ рассмотрим рациональные функции

$$R_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \frac{\gamma_i}{x - g_i}$$

с условиями $R_i(x_j) = f(x_j)$ при $j = i-1, i, i+1$ и произвольной точкой $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$; ниже будем считать $R_0(x) \equiv R_1(x)$, $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$, $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_{N-1}\}$.

Тогда при каждом $k = 1, 2, \ldots$ получим ([1]) кусочно–рациональную функцию $R_{N,k}(x) = R_{N,k}(x, f, \Delta, g)$ из класса $C^{(k)}_{[a,b]}$, для которой при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ выполняется равенство

$$R_{N,k}(x) = \frac{R_i(x)(x - x_{i-1})^k + R_{i-1}(x)(x_i - x)^k}{(x - x_{i-1})^k + (x_i - x)^k}.$$

Отметим, что если функция $f(x)$ выпукла или вогнута на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ при некотором $i = 1, 2, \ldots, N-1$, то интерполянт $R_i(x)$ также является соответственно выпуклой или вогнутой функцией на этом отрезке.

Сплайны $R_{N,k}(x)$ при $k \geqslant 2$ сохраняют выпуклость (вогнутость) функции $f(x)$ в некоторых окрестностях узлов сетки Δ.

Как следует из приводимых ниже утверждений, гладкие рациональные сплайны $R_{N,k}(x)$ сами (в отличие от гладких полиномиальных сплайнов) и их производные обладают свойством безусловной сходимости на соответствующих классах непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций (по терминологии Ю.Н. Субботина [2]). При этом для функций из классов $C_{[a,b]}$ и $C^{(1)}_{[a,b]}$ следующее утверждение дает оценку скорости сходимости через модули непрерывности функции и ее производной.

Теорема 1. *Пусть для сетки узлов* $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 2)$ *и произвольного числа* $\lambda > 0$ *выбраны числа* $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_{N-1}\}$ *такие, что* $g_i = x_{i+1} + \lambda h_{i+1}$ *при* $h_{i+1} \leqslant h_i$ *и* $g_i = x_{i-1} - \lambda h_i$ *при* $h_{i+1} > h_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$. *Тогда для любой* $f \in C_{[a,b]}$ *и,* *отдельно, для любой* $f \in C^{(1)}_{[a,b]}$ *и соответствующих сплайнов* $R_{N,k}(x) = R_{N,k}(x, f, \Delta, g)$ $(k \geqslant 1)$ *при* $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \dots, N)$ *выполняются соответственно неравенства*

$$|f(x) - R_{N,k}(x)| \leqslant (2 + \max\{1, \lambda\})\omega(\Delta_i, f),$$

$$|f'(x) - R'_{N,k}(x)| \leqslant \left(4 + 8k + \frac{2}{\lambda}\right)\omega(\Delta_i, f').$$

В случае класса $C^{(2)}_{[a,b]}$ имеет место

Теорема 2. *Пусть задана последовательность сеток узлов* $\Delta^{(n)} : a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_n^{(n)} = b$ $(n = 2, 3, \dots)$ *с диаметром* $\|\Delta^{(n)}\| \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда существует последовательность наборов чисел* $g^{(n)} = \{g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, \dots, g_{n-1}^{(n)}\}$ $(n = 2, 3, \dots)$ *такая, что для любой* $f \in C^{(2)}_{[a,b]}$ *последовательность производных второго порядка соответствующих рациональных сплайнов* $R''_{n,2}(x, f, \Delta^{(n)}, g^{(n)})$ *равномерно сходится к* $f''(x)$ *на отрезке* $[a, b]$.

С безусловной сходимостью связано также следующее утверждение, в котором оценка скорости сходимости дана через модуль изменения порядка N функции $f \in C_{[a,b]}$, который определяется (см., напр., [3]) равенством

$$V_N(f, [a, b]) = \sup \sum_{i=1}^{N} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)|,$$

где супремум берется при фиксированном N по всем точкам $\alpha_1 < \beta_1 \leqslant \alpha_2 < \beta_2 \leqslant \dots \leqslant \alpha_N < \beta_N$ из отрезка $[a, b]$.

Теорема 3. *Если* $f \in C_{[a,b]}$, *то при любом натуральном* $N \geqslant 2$ *существует сетка узлов* $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ *и числа* $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ *такие, что для сплайна* $R_{N,k}(x) = R_{N,k}(x, f, \Delta, g)$ $(k \geqslant 1)$ *при* $x \in [a, b]$ *имеем*

$$|f(x) - R_{N,k}(x)| \leqslant \frac{3}{N} V_N(f, [a, b]).$$

Как видно из следующих двух утверждений, оценки в них в случае функций с производными (соответственно первого и второго порядков) конечной вариации имеют порядок скорости сходимости наилучших полиномиальных сплайнов ([4]).

Теорема 4. *Если* $f \in C^{(1)}_{[a,b]}$, *то при любых* $\lambda > 0$ *и натурального* n *существует сетка узлов* $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ *с* $N \leqslant 2n$ *и числа* $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ *такие, что сплайн* $R_{N,k}(x) = R_{N,k}(x, f, \Delta, g)$ $(k \geqslant 1)$ *при всех* $x \in [a, b]$ *удовлетворяет неравенству*

$$|f(x) - R_{N,k}(x)| \leqslant \left(2 + \frac{1}{\lambda}\right) \frac{b-a}{n^2} V_n(f', [a, b]).$$

Теорема 5. *Если* $f \in C^{(2)}_{[a,b]}$, *то при любом натуральном* n *существует сетка узлов* $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ *с* $N \leqslant 2n$, *для которой при любом выборе чисел*

$g = \{g_1, g_2, \ldots, g_{N-1}\}$ *с* $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$ *сплайн* $R_{N,k}(x) = R_{N,k}(x, f, \Delta, g)$ $(k \geqslant 1)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|f(x) - R_{N,k}(x)| \leqslant \frac{(b-a)^2}{4n^3} V_n(f'', [a,b]) + \frac{(b-a)^3}{4\mu n^3} \|f''\|_{[a,b]},$$

где $\mu = \min\{|x_{i-1} - g_i|, |x_{i+1} - g_i| : i = 1, 2, \ldots, N-1\}$.

Заметим, что фактически трехточечные рациональные интерполняты $R_i(x)$ можно определить для любой конечной функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a,b]$. При этом соответствующие рациональные сплайны $R_{N,k}(x, f, \Delta, g)$ при фиксированных сетке узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 2)$ и наборе точек $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_{N-1}\}$ являются линейными операторами на классе всех конечных на отрезке $[a,b]$ функций $f(x)$. Учитывая это, с помощью теоремы 1 можно изучить явление Гиббса для сплайнов по рациональным интерполянтам в случае функций, непрерывных на отрезке, исключая точки разрыва первого рода со скачком.

Теорема 6. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$*, исключая точку* $t_0 \in (a,b)$*, в которой* $f(x)$ *имеет разрыв первого рода со скачком. Тогда существуют последовательности сеток узлов* $\Delta^{(n)} : a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} = b$ *(*$n \geqslant 2$*) и наборов точек* $g^{(n)} = \{g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, \ldots, g_{n-1}^{(n)}\}$ *двух видов: в одном случае соответствующие рациональные сплайны* $R_{n,1}(x, f, \Delta^{(n)}, g^{(n)})$ *не обладают эффектом Гиббса около точки* t_0*, а в другом случае (в частности, в случае равномерных сеток) обладают.*

Литература

1. Рамазанов А.-Р. К., Магомедова В. Г. *Сплайны по рациональным интерполянтам* // Дагестанские электр. матем. известия. – 2015. – Вып. 4. – С. 22–31.

2. Субботин Ю. Н. *Вариации на тему сплайнов* // Фундамент. и прикл. матем. – 1997. – Т. 3. – Вып. 4. – С. 1043–1058.

3. Севастьянов Е. А. *Кусочно–монотонная аппроксимация и Ф–вариации* // Analysis Math. – 1975. – Вып. 1. – С. 141–164.

4. Субботин Ю. Н., Черных Н. И. *Порядок наилучших сплайн–приближений некоторых классов функций* // Мат. заметки. – 1970. – Т. 7. – Вып. 1. – С. 31–42.

SPLINES FOR THREE–POINT RATIONAL INTERPOLANTS

A.-R.K. Ramazanov, V.G. Magomedova

For continuous functions and continuously differentiable (of the first and second orders) functions we obtain convergence bounds for splines by three–point rational interpolants expressed through modulus of continuity and modulus of variation.

Keywords: splines, interpolation splines, rational splines.