

где $I_2(G)$ — евклидовы момент инерции области относительно своей границы. Равенство достигается в случае круга. Более того, если $I(\rho(G)) \neq 0$, то неравенство обращается в строгое, здесь $I(\rho(G))$ — длина границы множества, отстоящего на расстоянии $\rho(G)$ от границы ∂G .

Будем называть выпуклую область G_0 сжатием выпуклой области G , если область G_0 можно получить из G путем вырезания прямоугольного фрагмента и соединения оставшихся частей. Немного более сложным образом операцию сжатия можно определить и для невыпуклых областей.

Гипотеза. Утверждение теоремы остаётся справедливым и для односвязных областей, причём экстремальные области в неравенстве является несжимаемыми.

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (1.9773.2017/8.9), а также при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-41-02433 р_поволжье_a).

Литература

1. Bandle C. *Isoperimetric inequalities and applications*. – Boston-London-Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1980.
2. Pólya G., Szegő G. *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*. – Annals of Mathematical Studies. V. 27. Princeton: Princeton University Press, 1951.
3. Payne L.E. *Isoperimetric inequalities and their applications* // SIAM Review. – 1967. – V. 9, № 3. – P. 453–488.

ON LOWER BOUNDS OF TORSIONAL RIGIDITY OF SIMPLY CONNECTED DOMAIN

R.G. Salakhudinov

In this paper we give a brief survey of isoperimetric inequalities connecting the torsional rigidity and geometric characteristics of a plane domain. A number of new statements are also stated, some old and new hypotheses are formulated.

Keywords: isoperimetric inequality, torsional rigidity, Euclidean moment of domain with respect to the boundary, extremal domain.

УДК 517.54

РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА НА ЛУЧЕ С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ НОВЫМ МЕТОДОМ

Р.Б. Салимов¹, А.З. Сулейманов²

¹ salimov.rsb@gmail.com; Казанский государственный архитектурно-строительный университет

² ayaz-suleymanov-91@mail.ru; Казанский государственный архитектурно-строительный университет

В работе рассматривается краевая задача Римана с бесконечным индексом, когда краевое условие задачи задается на положительной действительной оси комплексной плоскости. Для решения этой задачи используется подход, основанный на устраниении

бесконечного разрыва аргумента коэффициента краевого условия с помощью специально подобранной аналитической функции.

Ключевые слова: краевая задача Римана, аналитическая функция, бесконечный индекс.

Пусть D – область в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, границей которой служит положительная действительная полуось L . Требуется определить функцию $\Phi(z)$, аналитическую и ограниченную в области D , если её граничные значения удовлетворяют условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L, \quad (1)$$

где $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ – предельные значения функции $\Phi(z)$ при $z \rightarrow t$ соответственно слева и справа, когда соответственно $\Im z > 0$ и $\Im z < 0$, $g(t)$ – заданная функция, удовлетворяющая условию Гельдера на L ($g(t) \in H_L$), $g(\infty) = 0$, коэффициент $G(t)$ – заданная функция, обладающая следующими свойствами:

$$\ln|G(t)| \in H_L, \quad \arg G(t) = v^- t^\rho + v(t), \quad (2)$$

v^- , ρ – заданные числа, $v^- > 0$, $0 < \rho < \frac{1}{2}$, $v(t)$ – заданная функция, $v(t) \in H_L$.

В статье [1], дано решение однородной задачи Римана, когда в краевом условии (1) отсутствует слагаемое $g(t)$, путём устранения бесконечного разрыва $\arg G(t)$ с помощью специально подобранной аналитической функции. Оно отличается простотой и прозрачностью по сравнению с решением, разработанным Н. В. Говоровым – основателем научного направления, посвящённого задачам Римана с бесконечным индексом [2] (с. 113-123). Краткие сведения о развитии этого научного направления приведены в [1].

В данной работе подход, применённый в статье [1], используется для нахождения частного решения краевой задачи (1).

Возьмём функцию $E(z) = e^{(\alpha+i\beta)z^\rho}$, $0 \leq \arg z \leq 2\pi$, $\beta = -\frac{v^-}{2}$, $\alpha = -\beta \frac{\cos \rho\pi}{\sin \rho\pi}$, аналитическую в области D , граничные значения которой $E^+(t)$, $E^-(t)$ (обозначаемые как и в случае $\Phi(t)$) удовлетворяют равенству

$$\frac{E^+(t)}{E^-(t)} = e^{-iv^- t^\rho}. \quad (3)$$

Для $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ имеем

$$E(re^{i\theta}) = \exp \left\{ \left[\frac{v^- \cos \rho(\pi - \theta)}{2 \sin \rho\pi} + i \frac{v^- \sin \rho(\theta - \pi)}{2 \sin \rho\pi} \right] r^\rho \right\}. \quad (4)$$

Краевое условие (1), умножая на $E^+(t)$ и обозначая $G_1(t) = \frac{E^+(t)}{E^-(t)} |G(t)| e^{i \arg G(t)}$, представим так

$$\Phi^+(t)E^+(t) = G_1(t)\Phi^-(t)E^-(t) + E^+(t)g(t), \quad t \in L, \quad (5)$$

причём в силу (2), (3)

$$G_1(t) = |G(t)| e^{iv(t)}. \quad (6)$$

Как видно из формулы (4) (при $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$, $r = t$),

$$|E^+(t)| = |E^-(t)| = \exp\left(\frac{\nu^{-1} \cos \rho \pi}{2 \sin \rho \pi} t^\rho\right) \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Чтобы устранить эту особенность в краевом условии (5), возьмём целую функцию с отрицательными нулями $F(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{r_k})$, $0 < r_1 < r_2 < \dots$.

Нетрудно проверить [3] (с. 272), что для этой функции при $z = t > 0$ имеет место соотношение

$$\ln F(t) = t \int_L \frac{n(x) dx}{x(x+t)}, \quad (7)$$

где $n(x)$ обозначает число нулей $-r_1, -r_2, \dots$ функции $F(z)$, для которых $r_k \leq x$. Примем, что для указанных нулей существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(x)}{x^\rho} = \Delta > 0$.

Можно показать, что при $t > 0$ формулу (7) можно представить так [2] (с. 125):

$$\ln F(t) = \frac{\pi \Delta}{\sin \rho \pi} t^\rho + I(t), \quad I(t) = t \int_0^\infty \frac{n(x) - \Delta x^\rho}{x(x+t)} dx. \quad (8)$$

В этой формуле, как и в работе [2] (стр. 127), возьмём $n(x) = [\Delta x^\rho + \frac{1}{2}]$ – целой части суммы $\Delta x^\rho + \frac{1}{2}$, тогда $r_k = (\frac{2x+1}{2\delta})^{\frac{1}{\rho}}$, $k = 1, 2, \dots$

Учитывая, что при $\theta = 0$, $z = r = t > 0$ согласно (4) $\ln E^+(t) = (\frac{\nu^{-1} \cos \rho \pi}{2 \sin \rho \pi} - i \frac{\nu^{-1}}{2}) t^\rho$, выберем число Δ , входящее в формулу (8), так, чтобы $\pi \Delta = \frac{\nu^{-1}}{2} \cos \rho \pi$.

Тогда функция $F(z)$ будет определена полностью. При этом, на основании результатов книги [2] (с. 128) заключаем, что $\frac{E^+(t)}{F(t)} g(t) \in H_L$.

Для простоты, не ограничивая общности, примем, что для функции $G(t)$, $v(t)$ формулы (6) выполняются условия $|G(0)| = 1$, $v(0) = 0$, $|G(\infty)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |G(t)| = 1$, $v(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$, $g(0) = 0$, определим аналитическую и ограниченную в области D функцию [4] (с. 119) $\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \ln G_1(x) \frac{dx}{x-z}$, значения которой на L ($\Gamma^+(t)$, $\Gamma^-(t)$) удовлетворяют условию H_L ([5], с.с. 61, 66, 68), кроме того $\Gamma(\infty) = 0$ ([5], с. 68). Функция $\chi(z) = e^{\Gamma(z)}$ является аналитической в области D и её граничные значения удовлетворяют краевому условию $\chi^+(t) = G_1(t) \chi^-(t)$ [4] (с. 109), [1].

Учитывая последнее, краевое условие (5) запишем в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi^+(t)} \cdot \frac{E^+(t)}{F(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{\chi^-(t)} \cdot \frac{E^-(t)}{F(t)} + \frac{E^+(t)}{F(t)} \cdot \frac{g(t)}{\chi^+(t)}, \quad t \in L.$$

Зная скачок аналитической в области D функции $\frac{\Phi(z)}{\chi(z)} \cdot \frac{E(z)}{F(z)}$ на линии L , равный $\frac{E^+(t)}{F(t)} \cdot \frac{g(t)}{\chi^+(t)}$ и удовлетворяющий условию H_L , по известной формуле [4] (с. 106, 109) находим выраженное для указанной функции и получаем формулу

$$\Phi(z) = \chi(z) \frac{F(z)}{E(z)} \int_L \frac{E^+(x)}{F(x)} \cdot \frac{g(x)}{\chi^+(x)} \cdot \frac{dx}{x-z}, \quad (9)$$

интеграл от которой есть ограниченная в области D функция, стремящаяся к нулю при $|z| \rightarrow \infty$.

Значения отношения $\frac{F(z)}{E(z)}$ на L представляют собой ограниченную функцию, порядок функции $\frac{F(z)}{E(z)}$ в области D меньше $\frac{1}{2}$, поэтому в силу теоремы Фрагмена-Линделёфа [6] (с. 69) отношение $\frac{F(z)}{E(z)}$ является функцией, ограниченной в области D . Такой же является и $\chi(z)$.

Таким образом, справедлива

Теорема. Формула (9) определяет ограниченное частное решение неоднородной задачи (1).

При $\rho = \frac{1}{2}$ формула (9) также даёт ограниченное частное решение задачи (1), в чем легко убедиться, замечая, что $\frac{F(z)}{E(z)}$ при $z = t < 0$ стремится к нулю, когда $t \rightarrow -\infty$.

Общее решение краевой задачи (1), как известно, представляется как сумма частного решения этой задачи и общего решения соответствующей однородной задачи.

Литература

1. Салимов Р. Б., Сулейманов А. З. *Новый подход к решению однородной краевой задачи Римана на луче с бесконечным индексом* // Известия вузов. Математика. – 2017, № 5. – С. 71-76.
2. Говоров Н. В. *Краевая задача Римана с бесконечным индексом*. – М.: Наука, 1986. – 239 с.
3. Титчмарш Е. *Теория функций*. – М.: Наука, 1980. – 464 с.
4. Гахов Ф. Д. *Краевые задачи*. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
5. Мухелишвили Н. И. *Сингулярные интегральные уравнения*. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
6. Левин Б. Я. *Распределение корней целых функций*. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.

NEW METHOD SOLUTION OF THE INHOMOGENEOUS RIEMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH INFINITE INDEX ON THE BEAM

R.B. Salimov, A.Z. Suleymanov

We consider the Riemann boundary value problem with infinite index when boundary condition of the problem is defined on the positive real axis of the complex plane. To solve this problem, we use an approach based on removal of the infinite gap of the argument of the coefficient in the boundary condition with a specially chosen analytic function.

Keywords: Riemann boundary value problem, analytic function, infinite index.