параболо-гиперболических уравнений были изучены обратные задачи по отысканию функций $u(x,t)$ и $f_i(x)$, когда $g_i(t) \equiv 1$. Поставленные задачи для уравнения (1) при $n = 0$ изучены в [4, с. 228–238].

В данной работе доказаны соответствующие теоремы единственности и существования решений задач 1 – 3 для уравнения (1) при $n > 0$.

Литература

1. Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. *Начально-граничная задача для неоднородных вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типа* // Итоги науки и техники. Серия Совр. матем. и ее прил. Тем. обзоры. – 2017. – Т. 137. – С. 26–60.

2. Сидоров С. Н. *Нелокальная обратная задача по определению правых частей вырождающегося уравнения смешанного параболо-гиперболического типа* // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2014. – № 25 (196). – Вып. 37. – С. 45–57.

3. Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. *Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием* // Изв. вузов. Математика. – 2015. – № 1. – С. 46–59.

4. Сабитов К. Б. *Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа.* – М.: Наука, 2016. – 272 с.

INVERSE PROBLEMS ON DETERMINATION OF THE RIGHT-HAND SIDES OF A MIXED PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE EQUATION WITH DEGENERATE PARABOLIC PART

S.N. Sidorov

Inverse problems on the determination of the factors of expressions in the right-hand sides of a mixed parabolic-hyperbolic type equation that depend on the time are studied. On the basis of the theory of integral equations, the corresponding uniqueness and existence theorems for solutions are proved.

Keywords: equation of mixed parabolic-hyperbolic type, inverse problems, existence, uniqueness.

УДК 517.518.87

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С КРАТНЫМИ УЗЛАМИ ДЛЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА ГИЛЬБЕРТА

Ю.С. Солиев[1]

1 *su1951@mail.ru*; Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет

Для гиперсингулярного интеграла Гильберта построены и исследованы квадратурные формулы с кратными узлами.

Ключевые слова: гиперсингулярный интеграл Гильберта, интерполяция с кратными узлами, квадратурная формула.

Приближенное вычисление гиперсингулярных интегралов Гильберта и Коши-Адамара рассматривалось в работах И.В. Бойкова, Б.Г. Габдулхаева, И.К. Лифанова, А.М. Линькова, их учеников и последователей. Некоторый обзор работ по этой тематике содержится в работе [1].

Для гиперсингулярного интеграла Гильберта (см., напр., [2], [3])

$$Ax = A(x;s) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} x(\sigma)\operatorname{cosec}^2\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma, \tag{1}$$

понимаемого в смысле конечной части по Адамару, где $x(s)$ – плотность интеграла, непрерывная 2π – периодическая функция, построены и исследованы квадратурные формулы с узлами различной кратности.

Пусть $H_n x = H_n(x;s)$ – тригонометрический полином порядка n с равным нулю коэффициентом при $\cos ns$, интерполирующий функцию $x(s)$ в узлах $s_k = \frac{2k\pi}{n}, k = \overline{1,n}$, такой, что $H_n(s_k) = x(s_k), H'_n(s_k) = x'(s_k), k = \overline{1,n}$. Известно [4], что

$$H_n x = H_n(x,s) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(x(s_k) + x'(s_k)\sin(s - s_k))(\sin\frac{ns}{2}\operatorname{cosec}\frac{s - s_k}{2})^2. \tag{2}$$

Аппроксимируя плотность интеграла (1) полиномом (2), получим квадратурную формулу

$$Ax = A(H_n x, s) + R_n x = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(a(s - s_k)x(s_k) + b(s - s_k)x'(s_k)) + R_n x, \tag{3}$$

где $a(t) = \frac{1}{2}(n(1 + \cos nt) - \sin nt\operatorname{ctg}\frac{t}{2})\operatorname{cosec}^2\frac{t}{2}$, $b(t) = n\cos\frac{2n-1}{2}t\operatorname{cosec}\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sin nt\operatorname{cosec}^2\frac{t}{2} - n\sin nt$, а $R_n x = R_n(x,s)$ – остаточный член.

Квадратурная формула (3) точна для любого тригонометрического полинома порядка не выше $n - 1$.

При $x'(s_k) = 0$ из (3) следует квадратурная формула для интеграла (1), полученная аппроксимацией плотности интерполяционной формулой Джексона.

В квадратурной формуле (3) в качестве узлов можно взять точки $s_k = \frac{2k-1}{n}\pi, k = \overline{1,n}$.

Пусть $x(t) \in H_\alpha^{(r)}, 0 < \alpha \le 1, r \ge 2$. Тогда для остаточного члена квадратурной формулы (3) справедлива оценка

$$\|R_n x\|_C = O(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-2}}), \quad r + \alpha > 2.$$

В работе [5] с использованием кратного и лакунарного тригонометрического интерполирования построены различные квадратурные формулы для сингулярного интеграла с ядром Гильберта. Эти результаты легко перенести для интеграла (1).

Рассмотрим, например, случай (0,1,2)-интерполирования по узлам $s_k = \frac{2k\pi}{2n+1}(k = \overline{0,2n})$ (см. [6], [7]). Пусть $T_n x = T_n(x,s)$ – (0,1,2)-интерполяционный тригонометрический полином порядка $3n + 1$ по узлам $s_k = \frac{2k\pi}{2n+1}(k = \overline{0,2n})$, такой, что $T_n^{(j)}(s_k) = x^{(j)}(s_k), j = \overline{0,2}$.

Аппроксимируя плотность интеграла (1) полиномом $T_n x = T_n(x;s)$, получим квадратурную формулу

$$Ax = A(T_n x;s) + R_n x = \frac{1}{(2n+1)^3}\sum_{k=0}^{2n}(a(s - s_k)x(s_k) + b(s - s_k)x'(s_k) + c(s - s_k)x''(s_k)) + R_n x, \tag{4}$$

где

$$a(t) = 2\sum_{\nu=1}^{n}(\nu^2-(2n+1)^2)\nu\cos\nu t + \sum_{\nu=n+1}^{3n+1}(\nu-2n-1)(4n+2-\nu)\nu\cos\nu t,$$

$$b(t) = -2\sum_{\nu=1}^{n}\nu\cos\nu t + \sum_{\nu=n+1}^{3n+1}\nu\cos\nu t,$$

$$c(t) = -4\sum_{\nu=1}^{n}\nu^2\sin\nu t + \sum_{\nu=n+1}^{3n+1}(2\nu-6n-3)\nu\sin\nu t,$$

а $R_n x = R_n(x,s)$ – остаточный член.

Заметим, что легко найти тригонометрические суммы, входящие в выражения для коэффициентов квадратурной формулы (4), однако выражения для них получаются довольно громоздкими и поэтому, они здесь не приводятся.

Пусть $x(t) \in H_\alpha^{(r)}, 0 < \alpha \le 1, r \ge 3$. Тогда для остаточного члена квадратурной формулы (4) справедлива оценка

$$\|R_n x\|_C = O(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-3}}), \quad r+\alpha > 3.$$

Литература

1. Бойков И. *Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Монография, ч.2. Гиперсингулярные интегралы.* – Пенза: изд-во Пенз. гос. ун-та, 2009. – 252 с.

2. Ашур С., Шарипов Р. *Квадратурные формулы для сингулярных интегралов Адамара* // Констр. теор. функц. и функц. анал. – Казань: изд-во Казанского ун-та, 1992. – С. 15–23.

3. Вайникко Г., Лифанов И. *Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения.* – М.: "Янус-К", 2001. – 508 с.

4. Турецкий А. *Теория интерполирования в задачах.* – Минск: "Вышэйшая школа", 1968. – 320 с.

5. Солиев Ю. *Квадратурные и кубатурные формулы с кратными узлами для сингулярных интегралов. Дис... канд. физ.-мат. наук.* – Казань, 1978. – 127 с.

6. Зеель Э. *О кратном тригонометрическом интерполировании* // Изв. вузов. Матем. – 1974. – № 3. – С. 43–51.

7. Зеель Э. *О тригонометрическом* $(0,p,q)$ *- интерполировании* // Изв. вузов. Матем. – 1970. – № 3. – С. 27–35.

QUADRATURE FORMULAS WITH MULTIPLE NODES
FOR THE HILBERT HYPERSINGULAR INTEGRAL

Yu.S. Soliev

For the Hilbert hypersingular integral quadrature formulas with multiple nodes are constructed and studied.

Keywords: Hilbert hypersingular integral, interpolation with multiple nodes, quadrature formula.