Литература

1. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. *Обратные краевые задачи и их приложения.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. – 333 с.

2. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташов А. В. *Обратные краевые задачи аэрогидродинамики.* — М.: Наука, 1994. – 436 с.

3. Лабуткин А. Г., Салимов Р. Б. *Видоизмененная обратная краевая задача для крылового профиля, расположенного вблизи прямолинейного экрана* // Известия вузов. Матем. 2008. – № 2. – С. 32-40.

4. Салимов Р. Б., Селезнев В. В. *Решение краевой задачи Гильберта с разрывами коэффициента для кольца* // Изд. Казан. гос. ун-та. Труды семинара по краевым задачам, 1980. – Вып. 17. – С. 140-157.

5. Ахиезер Н. И. *Элементы теории эллиптических функций.* – М.: Наука, 1970. – 304 с.

INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A WING PROFILE LOCATED
NEAR A RECTILINEAR SCREEN

R.B. Salimov, T.Yu. Gorskaya

We consider an inverse boundary value problem for a wing profile located near a solid rectilinear boundary and flowing in an incompressible inviscid fluid with a velocity at infinity parallel to this boundary. It is required to determine the shape and position of the wing profile according to the velocity potential distribution, defined on it as a function of the abscissa of the profile point and the given difference between the values of the current function on the profile and on the rectangular boundary (or a value associated with the indicated difference).

Keywords: inverse boundary value problem, wing profile, incompressible inviscid fluid, complex potential.

УДК 517.956.2

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ КОШИ-РИМАНА С ПОМОЩЬЮ УНИФОРМИЗАЦИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Д.С. Сафаров[1]

1 *safarov-5252@mail.ru*; Курган-Тюбинский госуниверситет имени Н. Хусрава, Республики Таджикистан

В работе методом униформизации эллиптической кривой получено решение специальной нелинейной системы уравнений Коши – Римана, выражающееся через эллиптические функции Вейерштрасса.

Ключевые слова: эллиптическая функция, дифференцируемое отображение, двоякопериодическое решение, униформизация.

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим нелинейную обобщенную систему уравнений Коши – Римана

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right)^2 = f^2(z)[4a_1 w^3 + 6a_2 w^2 + 4a_3 w + a_4] = f^2(z)G_3(z), \tag{1}$$

где $z = x + iy$, $w = u + i\vartheta$, $2w_{\bar{z}} = w_x + iw_y$, a_1, a_2, a_3, a_4 – комплексные постоянные, $f(z)$ – заданная функция, причём многочлен в правой части не имеет кратных корней.

Будем искать решение уравнения (1). С этой целью уравнению (1) сопоставим эллиптическую кривую [1]

$$\tau^2 = 4a_1 t^3 + 6a_2 t^2 + 4a_3 t + a_4. \tag{2}$$

Задача об униформизации этой кривой решается с помощью эллиптические функции Вейерштрасса $\wp(t)$ и $\wp'(t)$ [1].

Пусть g_2 и g_3 – любые комплексные числа, подчиненные условию $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$.

В теории модулярных функций [1] показано, что при выполнении этого условия система уравнений [1]

$$\left.\begin{aligned} 60\sum{}'(m_1h_1 + m_2h_2)^{-4} = q_2, \\ 140\sum{}'(m_1h_1 + m_2h_2)^{-6} = q_3, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

имеет одно решение на верхней полуплоскости, то есть $Jm(h_2/h_1) > 0$. Тогда функция Вейерштрасса $\wp(u)$, построенная на периодах h_1 и h_2, будет удовлетворять дифференциальному уравнению [1]

$$\wp'^2(u) = 4\wp^2(u) - g_2\wp(u) - g_3. \tag{4}$$

Поэтому пара (t_1, τ_1), где

$$t_1 = \wp(u), \ \ \tau_1 = \wp\prime(u) \tag{5}$$

будет при любом u точкой алгебраической кривой

$$\tau_1^2 = 4t_1^3 - g_2t_1 - g_3. \tag{6}$$

Равенства (5) устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками алгебраической кривой (6) и точками параллелограмма периодов функции $\wp(u)$, при этом пару (∞, ∞) также считают точкой алгебраической кривой.

При помощи замены переменных уравнение (2) сводится к виду (6). Тогда [2], если

$$g_2 = 3a_2^2 - 4a_1a_3, \ \ g_3 = 2a_1a_2a_3 - a_2^3 - a_1^2a_4,$$

то в силу предположении, что уравнение $G_3(z) = 0$ имеет три различные корни, дискриминант полученного уравнения вида (6) $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. Поэтому, можно найти периоды h_1, h_2, решив систему уравнений и построенная функция Вейерштрасса $\wp(u)$ удовлетворяет уравнению (4).

При замене

$$t = \frac{1}{a_1}\left(\wp(u) - \frac{1}{2}a_2\right), \ \ \tau = \frac{\wp\prime(u)}{a_1},$$

где u – точка параллелограмма периодов Ω функции $\wp(u)$, все точки (t, τ) кривой (2) находится в взаимно однозначное соответствие с точками параллелограмма Ω.

Пусть теперь g_2, g_3 – инварианты функции $\wp(u)$ и Ω – фундаментальная область двоякопериодической группы P

$$\omega(z) = z + m_1, h_1 + m_2h_2, \ \ m_1, m_2 = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots,$$

$h_1,\ h_2$ – решение системы (3).

Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$w(z) = \frac{1}{a_1}\left[\wp(\varphi(z)) - \frac{1}{2}a_2\right], \tag{7}$$

где $\varphi(z)$ – некоторое дифференцируемое квазиконформное отображение область Ω на области $\varphi(\Omega)$, удовлетворяющее условию квазипериодичности

$$\varphi(z + m_1h_1 + m_2h_2) = \varphi(z) + m_1h_1 + m_2h_2,,\ \ m_2 = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots \tag{8}$$

По определению [2,3] $\varphi(z)$ – гомеоморфизм класса C^1 и удовлетворяет уравнению Бельтрами

$$\varphi_{\bar z} - q(z)\varphi_z = 0,\ |q(z)| \le q_0 < 1, \tag{9}$$

где $q(z)$ – заданная двоякопериодическая функция с периодами $h_1,\ h_2$, непрерывная по Гёльдеру в области Ω с показателем α, $\alpha \in (0,1)$. Класс таких функций обозначается через H_*^α.

Подставляя (2) в уравнение (1), в силу уравнения для $\wp(u)$, относительно $\varphi(z)$ получим неоднородное уравнение Коши – Римана

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z} = f(z)\ \left(\text{или}\ \frac{\partial\varphi}{\partial\bar z} = -f(z)\right). \tag{10}$$

Функция

$$\varphi(z) = z + \chi(z) \in C^1 \tag{11}$$

удовлетворяет условию квазипериодичности (8), если функция $\chi(z)$ является двоякопериодическим решением уравнения (10) с периодами h_1, h_2. Если $f(z) \in H_*^\alpha$ и

$$\iint\limits_\Omega f(z)d\Omega = 0,$$

то в силу условии $\varphi(0) = 0$, $\chi(z)$ представимо в виде [5]

$$\chi(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_\Omega f(t)[\zeta(t-z) - \zeta(t)]\,d_t\Omega = T_\zeta f(z),$$

$\zeta(z)$ – дзета-функция Вейерштрасса, $\zeta'(z) = -\wp(z)$.

В [4, 5] показано, что интегральный оператор $T_\zeta f(z)$ обладает свойством оператора Векуа [2]

$$T_\Omega f = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_\Omega \frac{f(t)}{t-z}d_t\Omega = 0,\ (T_\zeta f)_{\bar z} = f(z),\ (T_\zeta f(z))_z = S_\zeta f(z),$$

$S_\zeta f(z)$ – сингулярный интеграл с ядром функции $\wp(u)$ и

$$T_\zeta : \left\{\rho \in L_p^*,\ \iint\limits_\Omega p\,d\Omega = 0\right\} \to \overset{*}{W}{}_p^1, p > 2, \|S_\zeta\|_{L_2} = 1,$$

L_p^*, $\overset{*}{W}{}_p^1$ – пространство двоякопериодических функций, принадлежащих соответственно $L_p(\overline{\Omega})$, $W_p^1(\Omega), \overset{*}{W}{}_p^1 \subset H_*^\alpha, \alpha = \frac{p-2}{p}$.

Чтобы $\varphi(z)$ по формуле (11) давало искомое отображение, функция $f(z)$ должна удовлетворять сингулярному интегральному уравнению вида [2-4]

$$f(z) - q(z)S_\zeta f(z) = q(z).$$

Показано, что это уравнение всегда имеет единственное решение вида

$$f(z) = (1 - qS_\zeta)^{-1} q,$$

где $(1 - qS_\zeta)^{-1}$ – обратный к оператору $1 - qS_\zeta$ и при выполнении условия

$$\iint\limits_\Omega (1 - qS_\zeta)^{-1} d\Omega = 0,$$

функция $\varphi(z)$ – дифференцируемое квазиконформное отображение параллелограмма Ω с вершинами $0, h_1, h_1 + h_2, h_2$ в четырехугольник $\varphi(\Omega)$ с вершинами $0, h_1, h_1 + h_2, h_2$.

Так как функция $\wp(u)$ четная, то решение уравнения (1) можно взять в виде

$$w(z) = \frac{1}{a_1}\left[\wp(c + \varphi(z)) - \frac{1}{2}a_2\right],$$

где c – некоторая постоянная.

С помощью полученного решения уравнения (1) можно решить задачу об униформизации алгебрачеcкой поверхности вида $\tau^2 = z_1^2(a_0 z_2^4 + a_1 z_2^3 + a_2 z_2^2 + a_3 z_2 + a_4)$, где $(z_1, z_2, \tau) \in \mathbb{C}^3$.

Литература

1. Курант Р. *Теория функций*. – М.: Наука, 1968. - 468 с.
2. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции*. – М.: Физматлит, 1959. - 609 с.
3. Альфорс Л. *Лекции по квазконформные отображениям*. – М.: Мир, 1969. -130 с.
4. Сафаров Д.С. *Двоякопериодические решения равномерно эллиптических систем первого порядка* // ДАН России. – 2010. – Т. 430, № 4. – С. 454-457
5. Сафаров Д.С. *Периодические решения эллиптических систем первого порядка* // Дифф. уравнен. – 1981. – Т. 17, № 8. – С. 468-1477.

ON INTEGRATION OF A NONLINEAR SYSTEMS OF CAUCHY-RIEMANN EQUATIONS WITH THE HELP OF UNIFORMIZATION OF ELLIPTIC CURVES

D.S. Safarov

By the method of uniformization of elliptic curves, we obtain a solution of a special nonlinear system of Cauchy – Riemann equations via Weierstrass elliptic functions.

Keywords: elliptic function, differentiable mapping, doubly periodic solution, uniformization.