APPLICATION OF MATHEMATICAL MODELS OF HYDROMECHANICS OF MULTIPHASE ENVIRONMENTS TO NUMERICAL STUDYING OF NON-STATIONARY PROCESSES IN NON-UNIFORM LOW-TEMPERATURE PLASMA

D.A. Tukmakov

The mathematical model of quasi-neutral dusty plasma, condensed phase of which has multifraction structure, is presented by the particles having various size and consisting of substances with various physical properties. The offered model of dusty plasma is developed on the basis of the polydisperse multi-speed and multitemperature gas-suspension dynamics theory, taking into account speed and temperature delay of the condensed fractions particles. At the same time, it is supposed that disperse inclusions represent the spherical particles differing in the size and materials which particles consist of, they can have various density and heat conductivity.

Keywords: mathematical model, dynamics of dust plasma, polydisperse structure.

УДК 517.98

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, СОХРАНЯЮЩИЕ СПЕКТРАЛЬНЫЙ ПОРЯДОК

Е. Турилова[1], Я. Хамхалтер[2]

1 *ekaterina.turilova@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *hamhalte@math.feld.cvut.cz*; Czech Technical University in Prague

В работе исследуются спектральные автоморфизмы, сохраняющие ортогональность на множестве эффектов. Показывается, что любой такой спектральный автоморфизм на AW^*-факторе, не являющемся фактором типа III и I_2, представляет собой композицию функционального исчисления с йордановым $*$-автоморфизмом. Полученный результат можно рассматривать как теорему типа Вигнера.

Ключевые слова: AW^*-алгебра, спектральный порядок, йорданов изоморфизм.

Для C^*-алгебры $\mathscr{A}$ *алгеброй эффектов* будем называть множество

$$E(\mathscr{A}) = \{a \in \mathscr{A} \mid a \geq 0, \|a\| \leq 1\}.$$

AW^*-алгебра, введенная Капланским в [3] как алгебраическая абстракция алгебры фон Неймана, может рассматриваться как C^*-алгебра с единицей, для каждого положительного элемента a которой определен ранговый ортопроектор $r(a)$ (носитель элемента). Более того, для $\lambda \geq 0$ и $a \in \mathscr{A}^+$ определена система ортопроекторов $(E^a_\lambda)_{\lambda\geq 0}$, называемая *спектральным семейством или спектральным разложением a*. Отметим, что для AW^*-алгебры $\mathscr{A}$ алгебра эффектов имеет вид

$$E(\mathscr{A}) = \{a \in \mathscr{A} \mid 0 \leq a \leq 1\}.$$

Определение. *Пусть $\mathscr{A}$ – AW^*-алгебра. Спектральным порядком $\leq_S$ называется отношение частичного порядка на $E(\mathscr{A})$, определяемое следующим образом:*

$$a \leq_S b, \text{ если } E^b_\lambda \leq E^a_\lambda \text{ для любого } \lambda \geq 0.$$

Алгебра эффектов, снабженная спектральным порядком, представляет собой полную решетку.

Йорданов $*$-изоморфизм между C^*-алгебрами $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ будем называть линейную биекцию $J : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, сохраняющую сопряжение и квадрат: $J(a^*) = J(a)^*$, $J(a^2) = J(a)^2$ для любого $a \in \mathscr{A}$. Если $\mathscr{A} = \mathscr{B}$, то такое отображение называется йордановым $*$-автоморфизмом.

Проекторным автоморфизмом на $\mathscr{A}$ называется биекция τ на множестве ортопроекторов алгебры $\mathscr{A}$, сохраняющая порядок в обоих направлениях:

$$p \le q \Longleftrightarrow \tau(p) \le \tau(q) \qquad \text{для любых ортопроекторов } p, q;$$

Спектральным автоморфизмом на $\mathscr{A}$ называется биекция φ на алгебре эффектов алгебры $\mathscr{A}$, сохраняющая спектральный порядок в обоих направлениях:

$$a \le_S b \Longleftrightarrow \varphi(a) \le_S \varphi(b) \qquad a, b \in E(\mathscr{A}).$$

Предположим, что τ – проекторный автоморфизм на $\mathscr{A}$. Определим $\varphi_\tau : E(\mathscr{A}) \to E(\mathscr{A})$ следующим образом:

$$E_\lambda^{\varphi_\tau(a)} = \tau(E_\lambda^a)$$

для любых $a \in E(\mathscr{A})$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда φ_τ – спектральный автоморфизм на $\mathscr{A}$.

Пусть далее $f : [0,1] \to [0,1]$ – неубывающая биекция. Тогда преобразование $a \to f(a)$ является спектральным автоморфизмом на $\mathscr{A}$. Будем называть спектральный автоморфизм φ на $\mathscr{A}$ *каноническим*, если он представим в виде композиции описанных преобразований:

$$\varphi(a) = \varphi_\tau(f(a)), \qquad a \in E(\mathscr{A}).$$

Следует отметить, что спектральный автоморфизм на $\mathscr{A}$ является каноническим тогда и только тогда, когда он сохраняет операторы, кратные ортопроекторам.

Два эффекта a и b называются ортогональными, если $ab = 0$. Спектральный автоморфизм на AW^*-алгебре $\mathscr{A}$, сохраняющий ортогональность в обоих направлениях, называется *спектральным ортоавтоморфизмом*.

Предложение [1]. *Пусть $\mathscr{A}$ – AW^*-алгебра без прямых слагаемых типа I_2. Тогда для любого проекторного ортоавтоморфизма φ на $\mathscr{A}$ существует единственный йорданов $*$-автоморфизм J, такой что*

$$\varphi(p) = J(p)$$

для любого ортопроектора p.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{A}$ – AW^*-алгебра, не имеющая прямых слагаемых типа I_2, φ – спектральный ортоавтоморфизм на $\mathscr{A}$, сохраняющий операторы, кратные единице. Тогда существует единственный йорданов $*$-изоморфизм $J : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ и единственная неубывающая биекция $f : [0,1] \to [0,1]$ такие, что*

$$\varphi(a) = J(f(a)) \qquad \text{для любого } a \in E(\mathscr{A}).$$

Заметим, что условие сохранения кратных операторов в предыдущей теореме не является "лишним". Но все известные примеры, иллюстрирующие это, не касаются алгебр, которые являются факторами (алгебрами с центром размерности один). В связи с этим возникла гипотеза о том, что любой спектральный ортоавтоморфизм на AW^*-факторах является каноническим. Первый результат в этом направлении был доказан в [2].

Следующая теорема показывает, что для всех факторов типа I и II (конечных или бесконечных) любой спектральный ортоавтоморфизм является каноническим. Можно заметить, что любой AW^*-фактор типа I является алгеброй фон Неймана, и этот случай перекрывается результатом Молнара и Шемрла [4]. Для AW^*-фактора типа III вопрос остается открытым.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{A}$ AW^*-фактор, не являющимся фактором типа III. Тогда любой спектральный ортоавтоморфизм φ на $\mathscr{A}$ является каноническим. Если $\mathscr{A}$ не является алгеброй матриц 2×2, то существует единственный йорданов $*$-автоморфизм $J:\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ и единственная неубывающая биекция $f:[0,1]\to[0,1]$ такие, что*

$$\varphi(a) = J(f(a)) \qquad \text{для любого } a \in E(\mathscr{A}).$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке “Grant Agency of the Czech Republic” (grant number P201/12/0290, "Topological and geometrical properties of Banach spaces and operator algebras").

Литература

1. Hamhalter J. *Dye Theorem and Gleason Theorem for AW*-algebras* // Jour. Math. Anal. Appl. – 2015. – V. 422. – P. 1103–1115.

2. Hamhalter J., Turilova E. *Spectral order on AW*-algebras and its preservers* // Lobach. Jour. of Math. – 2016. – V. 37. – № 4. – P. 439–448.

3. Kaplansky I. *Projections in Banach algebras* // Ann. of Math. – 1951. – V. 53. – № 2. – P. 235–249.

4. Molnar L., Šemrl P. *Spectral order automorphisms of the spaces of Hilbert space effects and observables* // Let. in Math. Phys. – 2007. – V. 80. – № 3. – P. 239–255.

TRANSFORMATIONS PRESERVING SPECTRAL ORDER

E. Turilova, J. Hamhalter

We investigate spectral automorphisms that respect orthogonality of effects. We show that any such spectral automorphism on AW^*-factor, that is not of Type III and I_2, is the composition of a function calculus with a Jordan $*$-automorphism. This result may be viewed as a Wigner type theorem in its "unsharp" version.

Keywords: AW^*-algebra, spectral order, Jordan isomorphism.