Литература

1. Шакиров И. А. *О наилучшей приближенной замене константы Лебега оператора Фурье* // Материалы межд. конф. по алгебре, анализу и геометрии, посвящен. юбилеям выдающихся профессоров Казанского ун-та, математиков Широковых. Казань: Казанский ун-т. Изд-во Академии наук РТ, 2016. – С. 352–353.

2. Шакиров И. А. *Об оптимальном приближении нормы оператора Фурье семейством логарифмических функций* // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2017. – Т. 139. – С. 92–104.

INFLUENCE OF SHIFT OF THE ARGUMENT OF THE APPROXIMATING FUNCTION ON APPROXIMATION OF THE LEBESGUE CONSTANT FOR THE FOURIER OPERATOR

I.A. Shakirov

For the Lebesgue constant of the Fourier operator, some approximate formulas notions are received. Errors of approximation are estimated in the uniform discrete metrics when the corresponding remainders belong to various classes.

Keywords: norm of the Fourier operator, asymptotic equality, remainder of the Lebesgue constant, the best approximation of the Lebesgue constant.

УДК 517.9

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СВЕРХСИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

Ф.М. Шамсудинов[1]

1 *faizullo100@yahoo.com*; Курган-Тюбинский государственный университет им. Носира Хусрава, Таджикистан

В данной работе для одного гиперболического уравнения второго порядка со сверхсингулярной точкой получены представления многообразия решений при помощи двух произвольных функций одного независимого переменного, изучены свойства полученных решений, а также рассмотрена граничная задача A.

Ключевые слова: интегральные представления, гиперболическое уравнение, многообразия решений, прямоугольник, свойства решений, граничная задача.

Пусть D – прямоугольник $\{(x,y): 0<x<\delta_1, \quad 0<y<\delta_2\}$. Далее обозначим

$$\Gamma_1 = \{y=0,\ 0<x<\delta_1\}, \quad \Gamma_2 = \{x=0,\ 0<y<\delta_2\}.$$

В области D рассмотрим уравнение следующего вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{a(x,y)}{r^\alpha}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b(x,y)}{r^\beta}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{c(x,y)}{r^{\alpha+\beta}} u = \frac{f(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}, \tag{1}$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $f(x,y)$ – заданные функции в области D, $\alpha > 2$, $\beta < 1$ (α, β – целые положительные числа).

Проблеме исследования дифференциальных уравнений с регулярными, сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами посвящены работы [1]–[6].

Способом, разработанным в [3] и [4] для уравнений (1), получены представления многообразия решений при помощи двух произвольных функции одной независимой переменной.

В дальнейшем обозначим $C_2(D)$ – класс функций, которые имеют непрерывные производные первого порядка в D такие, что $U_{xy} \in C(D)$.

Теорема 1. *Пусть в уравнении* (1) *коэффициенты и правая часть удовлетворяют следующим условиям:*

1. $a(x,y) \in C_x^1(\overline{D}),\ b(x,y),\ c(x,y),\ f(x,y) \in C(\overline{D})$;
2. $\left|a(x,y) - a(0,0)\right| \le H_1 r^{\alpha_1}, H_1 = \text{const},\ \alpha_1 > \alpha - 1$;
3. $a(0,0) < 0$;
4. $f(x,y) = o\left(r^{\delta_1}\right),\ \delta_1 > \alpha + \beta - 1$;
5. $c_1(x,y) = o\left(\exp\left[a(0,0)W^{(1)}_{\frac{\alpha}{2}-1}(x,y)\right] r^{\delta_2}\right),\ \delta_2 > \alpha + \beta - 1,$
   $c_1(x,y) = -c(x,y) + r^{\alpha+\beta}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{a(x,y)}{r^\alpha}\right) + a(x,y)b(x,y).$

Тогда любое решение уравнение (1) из класса $C_2(D)$ представимо в виде

$$u(x,y) = \exp\left[-W_a^\alpha(x,y) - a(0,0)W^{(1)}_{\frac{\alpha}{2}-1}(x,y)\right]\left\{F_1(x,y) + \right.$$
$$\left. + \int_0^y ds \int_0^x R_1(x,y;t,s)F_1(t,s)dt\right\} \equiv K_1(\varphi_1(x), \psi_1(y), f(x,y)), \quad (2)$$

$$F_1(x,y) = \varphi_1(x) + \int_0^y \exp\left[W_a^\alpha(x,s) - W_b^\beta(x,s) + a(0,0)W^{(1)}_{\frac{\alpha}{2}-1}(x,s)\right] \times$$
$$\times\left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f(t,s)}{(t^2+s^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\exp\left[W_b^\beta(t,s)\right]dt\right)ds, \quad (3)$$

$$W_a^2(x,y) = \int_0^y \frac{a(x,s)-a(0,0)}{(x^2+s^2)^{\frac{\alpha}{2}}}ds, \quad W_b^\beta(x,y) = \int_0^x \frac{b(t,y)-b(0,0)}{(t^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}dt,$$

$$W^{(1)}_{\frac{\alpha}{2}-1}(x,y) = \frac{y}{x^2(\alpha-2)r^{\alpha-2}} + \frac{1}{x^2}\frac{\alpha-3}{\alpha-2}J^{(1)}_{\frac{\alpha}{2}-1}(x,y), \quad J^{(1)}_{\frac{\alpha}{2}-1}(x,y) = \int_0^y (x^2+s^2)^{1-\frac{\alpha}{2}}ds,$$

$\varphi_1(x),\ \psi_1(y)$ – произвольные функции точек контуров Γ_1 и Γ_2. В равенстве (2) $R_1(x,y;t,s)$ – резольвента явно выписанного интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Доказательство теоремы 1 основана на представлении левой части уравнения (1) в виде произведения двух линейных дифференциальных операторов первого порядка.

Используя условия, наложенные на коэффициенты уравнения (1), представим это уравнение в следующем в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{b(x,y)}{r^{\beta}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}+\frac{a(x,y)}{r^{\alpha}}\right)u=\frac{f(x,y)+c_1(x,y)u(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}. \tag{4}$$

В равенстве (7), вводя новую неизвестную функцию

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{a(x,y)}{r^{\alpha}}u=V_1(x,y), \tag{5}$$

сведем задачу к решению следующего дифференциального уравнения

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}+\frac{b(x,y)}{r^{\beta}}V_1=\frac{f(x,y)+c_1(x,y)u(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}. \tag{6}$$

Считая в уравнении (6) правую часть известной, находим

$$V_1(x,y)=\exp\left[-W_b^{\beta}(x,y)\right]\left(\psi_1(y)+\int_0^x\frac{f(t,y)+c_1(t,y)u(t,y)}{(t^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\exp\left[W_b^{\beta}(t,y)\right]dt\right). \tag{7}$$

Теперь, решая уравнение (5), выражаем $u(x,y)$ через $V_1(x,y)$ [5, с. 26]:

$$u(x,y)=\exp\left[-W_a^{\alpha}(x,y)-a(0,0)W^{(1)}_{\frac{\alpha}{2}-1}(x,y)\right]\times$$
$$\times\left(\varphi_1(x)+\int_0^y V_1(x,s)\exp\left[W_a^{\alpha}(x,s)+a(0,0)W^{(1)}_{\frac{\alpha}{2}-1}(x,s)\right]ds\right). \tag{8}$$

Подставляя в (8) вместо $V_1(x,y)$ его значение из (7), приходим к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода. Решая это уравнение, получим утверждение теоремы 1.

При этом

$$u(x,y)\Big|_{y=0}=\varphi_1(x),\quad P^{\alpha}_{y,a}(u)\Big|_{x=0}=\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{b(x,y)}{r^{\alpha}}u\right)\Big|_{x=0}=\psi_1(y),$$

$$\varphi_1(x)\in C(\Gamma_1),\ \psi_1(y)\in C^1(\Gamma_2).$$

Поведение решения вида (8) в окрестности Γ_1 определяется равенством

$$u(x,y)=O\left(\exp\left[-a(0,0)W^{(1)}_{\frac{\alpha}{2}-1}(x,y)\right]\right)\quad \text{при}\quad x\to 0.$$

Для полученного интегрального представления решений уравнения (1) ставится и решается следующая граничная

Задача A. Требуется в области D найти решение уравнения (1) из класса $C_2(D)$, удовлетворяющее на Γ_1 и Γ_2 следующим граничным условиям:

$$\left.\begin{aligned}u(x,y)\Big|_{y=0}&=f_1(x),\\ P^{\alpha}_{y,a}(u)\Big|_{x=0}&=g_1(y),\end{aligned}\right\}$$

где $f_1(x)$, $g_1(x)$ – соответственно заданные функции точек контуров Γ_1 и Γ_2.

Литература

1. Нахушев А.М. *О задаче Дарбу для гиперболических уравнений* // ДАН СССР. – 1970. – Т. 195. – № 4. – С. 776–779.

2. Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.

3. Раджабов Н. *Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линей или сингулярными поверхностями*. Учебное пособие по спецкурсу, ч.4. – Душанбе, 1985. – 147 с.

4. Раджабов Н. *Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами*. – Душанбе: Изд. ТГУ, 1992. – 236 с.

5. Шамсудинов Ф.М. *Интегральные представления решений и граничные задачи для общего гиперболического уравнения второго порядка со сверхсингулярной коэффициентами* // ДАН РТ. – 2001. – Т. 44. – № 3-4. – С. 25–30.

6. Вирченко Н.А., Шамсудинов Ф.М. *Интегральные представления решений и граничные задачи для общего гиперболического уравнения второго порядка со сверхсингулярной точкой* // ДАН Украины. – 2003. – № 1. – С.17–22.

INTEGRAL REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS FOR A SECOND ORDER HYPERBOLIC EQUATION WITH A SUPERSINGULAR POINT

F.M. Shamsudinov

In this paper, for a hyperbolic equation of the second order with a supersingular point, we obtain representations of the set of solutions by means of two arbitrary functions of one independent variable, the properties of the solutions obtained are studied, and also the boundary value problem A is investigated.

Keywords: integral representations, hyperbolic equation, set of solutions, rectangle, solution properties, boundary value problem.

УДК 517.52

О НЕКОРРЕКТНОСТИ ПРИЗНАКА ПОТОЧЕЧНОЙ СХОДИМОСТИ ДИНИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ОБОБЩЁННЫМ СИСТЕМАМ ХААРА НА НУЛЬМЕРНЫХ ГРУППАХ

В.И. Щербаков[1]

1 *kafmathan@mail.ru*; Московский технический университет связи и информатики

В статье говорится, что полученный на модифицированном отрезке [0, 1] поточечный признак сходимости рядов Фурье по обобщённым системам Хаара S-признак Дини, который (для $\sup\limits_n p_n = \infty$) всегда лучше V-признака Дини (признака Дини-Виленкина) при распространении его на нульмерные компактные абелевы группы становится некорректным, ибо сходимость на группе может зависеть от выбора базисных элементов.

Ключевые слова: нульмерная компактная абелева группа, модифицированный отрезок [0, 1], обобщённые системы Хаара, V-признак Дини (признак Дини-Виленкина), S-признак Дини.