

УДК 517.54

**ПРИЛОЖЕНИЕ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ВЫРОЖДЕНИЕМ
ИНДЕКСА НА БЕСКОНЕЧНОСТИ К ПОСТРОЕНИЮ КОНФОРМНЫХ
ОТОБРАЖЕНИЙ**

Э.Н. Хасанова¹, П.Л. Шабалин²

¹ *enkarabasheva@bk.ru*; Казанский государственный архитектурно-строительный университет
² *pavel.shabalin@mail.ru*; Казанский государственный архитектурно-строительный университет

В работе проведено построение структурной формулы специального класса отображений полуплоскости на полигональные области со счетным множеством вершин и неограниченным вращением касательной. Класс отображений выделен ограничением на плотность распределения последовательности углов доворота касательной к границе образа полуплоскости при переходе через вершину полигона. Для этого класса доказан критерий существования однолистных отображений, представляемых данной структурной формулой.

Ключевые слова: конформные отображения, однолистность, краевая задача Гильберта.

В плоскости комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$, обозначим $D = \{\zeta, \text{Im}\zeta > 0\}$, $L = \partial D$, L_+ , L_- – положительная и отрицательная полуоси. Рассматриваем обобщение одной обратной задачи М.А. Лаврентьева о построении конформного отображения полуплоскости D на многоугольник с заданными углами при неизвестных вершинах на случай отображения на полигональную область со счетным множеством углов и бесконечным вращением касательной при обходе границы области.

Заданы прообразы $\{t_{-k}\} \subset L_-$, $\{t_k\} \subset L_+$, $k = \overline{1, \infty}$, неизвестных вершин A_{-k} , A_k , полигона l состоящего из двух ломаных l_+ , l_- с общими концами A_0 и A_∞ , ограничивающего область D_z комплексной плоскости $z = x + iy$, расположенную, возможно, на римановой поверхности. Точки t_{-k} , t_k удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t_k} < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|t_{-k}|} < \infty. \quad (1)$$

Также считаем заданными и внутренние углы $\alpha_{-k}\pi$ и $\alpha_k\pi$ при вершинах A_{-k} и A_k соответственно, причем $0 < \alpha_k < 1$, $1 < \alpha_{-k} < 2$, $k = \overline{1, \infty}$. Последние, впрочем, можно варьировать, оставаясь в классе отображений, определяемых следующими ограничениями на параметры области D_z . Кроме условия (1) будем считать выполненными неравенства

$$|n_+^*(\xi) - \Delta \ln^\alpha \xi| < C, \quad |n_-^*(\xi) - \Delta \ln^\alpha \xi| < C \quad (2)$$

с положительными постоянными Δ , α , C . Здесь

$$n_-^*(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 < \xi < -t_{-1}, \\ \sum_{j=1}^k \kappa_{-j}, & -t_{-k} < \xi < -t_{-k-1}, \end{cases} \quad n_+^*(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 < \xi < t_1, \\ \sum_{j=1}^k \kappa_j, & t_k < \xi < t_{k+1}, \end{cases}$$

$$\kappa_k = 1 - \alpha_k, \quad \kappa_{-k} = \alpha_{-k} - 1, \quad k = \overline{1, \infty}.$$

Структурная формула конформного отображения с описанными выше ограничениями получена с использованием решения однородной задачи Гильберта с разрывными коэффициентами и двусторонним завихрением на бесконечности вида $O(\ln^\alpha |\xi|)$, где $0 < \alpha$. Такой метод построения конформного отображения представлен в работе Р.Б. Салимова и П.Л. Шабалина [1], в которой задача построения отображения полуплоскости на многоугольник с бесконечным числом вершин решается с помощью однородной задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов краевого условия и двусторонним завихрением на бесконечности степенного порядка $O(|x|^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$.

Справедлива следующая (см. [2], [3])

Теорема. *Для того чтобы в классе отображений (1), (2) существовали однолистные необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $0 < \alpha \leq 1$.*

Литература

1. Салимов Р. Б., Шабалин П. Л. *Одно обобщение формулы Шварца-Кристоффеля* // Сиб. журн. индустр. матем. – 2010. – Т. 13. – № 4. – С. 109–117.
2. Karabasheva E. N., Shabalin P. L. *Univalence of mappings from half-plane to a polygonal domains with infinite sets of vertices* // Lobachevskii J. Math. – 2015. – V. 36. – № 2. – P. 144–153.
3. Хасанова Э. Н. *Об однолистности конформных отображений обобщенным интегралом Кристоффеля–Шварца на полигональные области со счетным множеством вершин* // Изв. вузов. Матем. – 2017. – Т. 17. – № 7. – С. 74–83.

THE EMPLOYMENT OF THE HILBERT BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH LOGARITHMIC SINGULARITY OF THE INDEX AT INFINITY FOR THE CONSTRUCTION OF THE CONFORMAL MAPPINGS

E.N. Khasanova, P.L. Shabalin

In this paper we construct a structural formula for the conformal mapping of the half-plane onto a polygonal domain with an infinite number of vertices. The rotation of the tangent along the boundary is unlimited. The structural formula of the conformal mapping belongs to a special class. The criterion for existence of univalent mappings in the class is proved.

Keywords: conformal mapping, Hilbert boundary value problem, univalence.

УДК 515.124.2

О СВОЙСТВАХ МОДУЛЯРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В.В. Чистяков¹

¹ vcistyakov@hse.ru; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» — Нижний Новгород

Представлены элементы теории модулярных пространств на произвольных множествах, развивающей одновременно теорию таких пространств на линейных множествах и теорию метрических пространств. Изучается взаимосвязь между (тремя) модулярными пространствами и метриками на них в выпуклом и невыпуклом случаях.