

Структурная формула конформного отображения с описанными выше ограничениями получена с использованием решения однородной задачи Гильберта с разрывными коэффициентами и двусторонним завихрением на бесконечности вида $O(\ln^\alpha |\xi|)$, где $0 < \alpha$. Такой метод построения конформного отображения представлен в работе Р.Б. Салимова и П.Л. Шабалина [1], в которой задача построения отображения полуплоскости на многоугольник с бесконечным числом вершин решается с помощью однородной задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов краевого условия и двусторонним завихрением на бесконечности степенного порядка $O(|x|^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$.

Справедлива следующая (см. [2], [3])

Теорема. *Для того чтобы в классе отображений (1), (2) существовали однолистные необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $0 < \alpha \leq 1$.*

Литература

1. Салимов Р. Б., Шабалин П. Л. *Одно обобщение формулы Шварца-Кристоффеля* // Сиб. журн. индустр. матем. – 2010. – Т. 13. – № 4. – С. 109–117.
2. Karabasheva E. N., Shabalin P. L. *Univalence of mappings from half-plane to a polygonal domains with infinite sets of vertices* // Lobachevskii J. Math. – 2015. – V. 36. – № 2. – P. 144–153.
3. Хасанова Э. Н. *Об однолистности конформных отображений обобщенным интегралом Кристоффеля–Шварца на полигональные области со счетным множеством вершин* // Изв. вузов. Матем. – 2017. – Т. 17. – № 7. – С. 74–83.

THE EMPLOYMENT OF THE HILBERT BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH LOGARITHMIC SINGULARITY OF THE INDEX AT INFINITY FOR THE CONSTRUCTION OF THE CONFORMAL MAPPINGS

E.N. Khasanova, P.L. Shabalin

In this paper we construct a structural formula for the conformal mapping of the half-plane onto a polygonal domain with an infinite number of vertices. The rotation of the tangent along the boundary is unlimited. The structural formula of the conformal mapping belongs to a special class. The criterion for existence of univalent mappings in the class is proved.

Keywords: conformal mapping, Hilbert boundary value problem, univalence.

УДК 515.124.2

О СВОЙСТВАХ МОДУЛЯРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В.В. Чистяков¹

¹ vcistyakov@hse.ru; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» — Нижний Новгород

Представлены элементы теории модулярных пространств на произвольных множествах, развивающей одновременно теорию таких пространств на линейных множествах и теорию метрических пространств. Изучается взаимосвязь между (тремя) модулярными пространствами и метриками на них в выпуклом и невыпуклом случаях.

Дается определение модулярным понятиям сходимости, топологии и полноты. Указаны преобразования модулярных пространств (для правой обратной модуляры), связанные с их двойственностью. Утверждения иллюстрируются примерами.

Ключевые слова: модуляра, модулярное пространство, модулярная сходимость, правая обратная, Δ_2 -условие, модулярная полнота.

1. Понятие модуляры на вещественном линейном пространстве X обобщает понятие нормы ([9, 10]): функционал $\rho : X \rightarrow [0, \infty]$ есть (классическая) *модуляра* на X , если 1) $\rho(0) = 0$; 2) если $x \in X$ и $\rho(\alpha x) = 0 \forall \alpha > 0$, то $x = 0$; 3) $\rho(-x) = \rho(x) \forall x \in X$; и 4) $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y) \forall x, y \in X$ и $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$. Если в 4) имеет место неравенство 5) $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha \rho(x) + \beta \rho(y)$, то ρ называется *выпуклой модулярной*.

В настоящей работе определяется понятие модуляры на произвольном множестве X и изучаются свойства пространств, порожденных модулярами. Основные результаты теории модулярных пространств представлены в работах [1]– [8], которыми мы частично следуем.

2. Ниже будем рассматривать функции вида $w : (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$. Для $\lambda > 0$ и $x, y \in X$ (ввиду неравноправия аргументов) удобно положить $w_\lambda(x, y) = w(\lambda, x, y)$ и $w^{x,y}(\lambda) = w(\lambda, x, y)$, так что $w_\lambda : X \times X \rightarrow [0, \infty]$ ($\lambda > 0$) и $w^{x,y} : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ ($x, y \in X$).

Функция w называется *модулярной* на X , если для любых $x, y, z \in X$ имеем: (i) $x = y \Leftrightarrow w^{x,y} = 0$; (ii) $w^{x,y} = w^{y,x}$; и (iii) $w^{x,y}(\lambda + \mu) \leq w^{x,z}(\lambda) + w^{z,y}(\mu)$ для всех $\lambda, \mu > 0$. Модуляра w называется: *строгой*, если $w^{x,y}(\lambda) \neq 0$ для всех $\lambda > 0$ и $x, y \in X, x \neq y$; *выпуклой*, если в (iii) выполнено усиленное неравенство $(\lambda + \mu)w^{x,y}(\lambda + \mu) \leq \lambda w^{x,z}(\lambda) + \mu w^{z,y}(\mu)$ ([1, 3]).

Для модуляры w на X функция $w^{x,y}$ не возрастает на $(0, \infty)$ для всех $x, y \in X$, так что $w_{\lambda+0}(x, y) \leq w_\lambda(x, y) \leq w_{\lambda-0}(x, y)$ в $[0, \infty]$, причем функции $(w_{+0})_\lambda(x, y) = w_{\lambda+0}(x, y)$ и $(w_{-0})_\lambda(x, y) = w_{\lambda-0}(x, y)$ также являются модулярами на X .

Например, если $\rho : X \rightarrow [0, \infty]$ — классическая (выпуклая) модуляра на линейном пространстве X , то $w_\lambda(x, y) = \rho((x - y)/\lambda)$ есть (выпуклая) модуляра на X (и наоборот). Другой пример: если (X, d) — метрическое пространство, то $w_\lambda(x, y) = d(x, y)/\lambda^p$ ($p > 0$) есть *строгая модуляра* на X , являющаяся *выпуклой* при $p \geq 1$.

3. Модуляра w на X индуцирует три отношения эквивалентности на X : (a) $x \sim^* y$, если $w^{x,y} \neq \infty$; (b) $x \overset{0}{\sim} y$, если $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} w^{x,y}(\lambda) = 0$; и (c) $x \overset{\text{fin}}{\sim} y$, если $w^{x,y}(\lambda) < \infty$ для всех $\lambda > 0$. Зафиксировав $x^\circ \in X$, будем обозначать класс эквивалентности элемента x° по отношениям (a), (b) и (c) соответственно через X_w^* , X_w^0 и X_w^{fin} и называть *модулярным пространством*.

Имеют место включения $X_w^0 \subset X_w^*$ и $X_w^{\text{fin}} \subset X_w^*$, и если w выпуклая, то $X_w^0 = X_w^*$. Кроме того, $X_{w_{+0}}^* = X_{w_{-0}}^* = X_w^*$, $X_{w_{+0}}^0 = X_{w_{-0}}^0 = X_w^0$ и $X_{w_{+0}}^{\text{fin}} = X_{w_{-0}}^{\text{fin}} = X_w^{\text{fin}}$. Наиболее интересным (и устойчивым) является самое широкое модулярное пространство X_w^* .

Модулярное пространство X_w^* можно наделить метрикой (здесь $x, y \in X$ или X_w^*)

$$d_w^0(x, y) = \inf\{\lambda > 0 : w^{x,y}(\lambda) \leq \lambda\} = \inf_{\lambda > 0} \max\{\lambda, w_\lambda(x, y)\}$$

(для которой $d_{w_{+0}}^0 = d_{w_{-0}}^0 = d_w^0$), а если w выпуклая, то — дополнительно метрикой

$$d_w^*(x, y) = \inf\{\lambda > 0 : w^{x,y}(\lambda) \leq 1\} = \inf_{\lambda > 0} \max\{\lambda, \lambda w_\lambda(x, y)\},$$

и имеют место неравенства

$$\min\{d_w^*(x, y), \sqrt{d_w^*(x, y)}\} \leq d_w^0(x, y) \leq \max\{d_w^*(x, y), \sqrt{d_w^*(x, y)}\}. \quad (1)$$

4. Проиллюстрируем сказанное на примере ([8]). Пусть (M, d) — метрическое пространство и $X = M^{\mathbb{N}}$ — множество всех последовательностей $x = \{x_k\}$ из M . Положим

$$w_\lambda(x, y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{d(x_k, y_k)}{\lambda} \right)^{1/k}, \quad \lambda > 0, \quad x = \{x_k\}, \quad y = \{y_k\} \in X. \quad (2)$$

Тогда w — строгая невыпуклая модуляра на X , для которой функция $w^{x,y}$ непрерывна на $(0, \infty)$ для всех $x, y \in X$. Если $x^\circ = \{x_k^\circ\} \in X$, то $X_w^{\text{fin}} = X_w^*$,

$$x \in X_w^* \Leftrightarrow \sup_{k \in \mathbb{N}} (d(x_k, x_k^\circ))^{1/k} < \infty \quad \text{и} \quad x \in X_w^0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (d(x_k, x_k^\circ))^{1/k} = 0. \quad (3)$$

Отметим, что $X_w^0 \subset c(x^\circ) \subset \ell_\infty(x^\circ) \subset X_w^*$, где $x \in c(x^\circ)$, если $\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, x_k^\circ) = 0$, и $x \in \ell_\infty(x^\circ)$, если $\sup_{k \in \mathbb{N}} d(x_k, x_k^\circ) < \infty$. Кроме того, $d_w^0(x, y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} (d(x_k, y_k))^{1/(k+1)} < \infty$ для всех $x, y \in X_w^*$ (тогда как $d_w^*(x, y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} d(x_k, y_k) \leq \infty$ в силу невыпуклости w).

5. Модулярные пространства X_w^* , X_w^0 и X_w^{fin} замкнуты относительно d_w^0 -сходимости (d_w^* -сходимости для выпуклой w) на X . Более того, для последовательности $\{x_n\} \subset X$ и $x \in X$ имеем: $d_w^0(x_n, x) \rightarrow 0$ (при $n \rightarrow \infty$) тогда и только тогда, когда $w_\lambda(x_n, x) \rightarrow 0$ для всех $\lambda > 0$. Это мотивирует следующее определение (более слабой) сходимости на X ([6]).

Последовательность $\{x_n\} \subset X$ w -сходится (=модулярно сходится) к $x \in X$, если $w_\lambda(x_n, x) \rightarrow 0$ для некоторого $\lambda > 0$. Любой такой x называется w -пределом $\{x_n\}$. Из метрической сходимости относительно d_w^0 вытекает w -сходимость (но не наоборот).

Теорема 1 ([8]). (а) X_w^* и X_w^0 замкнуты относительно w -сходимости (а X_w^{fin} — нет).

(б) w -сходящаяся последовательность из X_w^* ограничена по метрике d_w^0 , и если w строгая, то w -предел этой последовательности единствен.

(с) w -сходимость и d_w^0 -сходимость на X эквивалентны в том и только том случае, когда w удовлетворяет следующему Δ_2 -условию на X : если $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$ и $\lambda > 0$ такие, что $w_\lambda(x_n, x) \rightarrow 0$, то $w_{\lambda/2}(x_n, x) \rightarrow 0$.

Например, модуляра w из (2) удовлетворяет Δ_2 -условию на X , поскольку для любых $\lambda, \mu > 0$ и $x, y \in X$ имеем $w_\mu(x, y) \leq \max\{1, \lambda/\mu\} \cdot w_\lambda(x, y)$.

Множество $U \subset X_w^*$ называется w -открытым, если для любых $x \in U$ и $\lambda > 0$ найдется такое $\mu > 0$, что $B_{\lambda, \mu}(x) \subset U$, где $B_{\lambda, \mu}(x) = \{y \in X_w^* : w_\lambda(x, y) < \mu\}$ есть (λ, μ) -окружение точки x . Дополнение в X_w^* к w -открытому множеству называется w -замкнутым. Можно показать ([8]), что множество в X_w^* является w -замкнутым в точности тогда, когда оно замкнуто относительно w -сходимости.

6. Правой обратной для модуляры w на X называется модуляра

$$w_\mu^+(x, y) \equiv (w^+)_\mu(x, y) = \inf\{\lambda > 0 : w^{x,y}(\lambda) \leq \mu\}, \quad \mu > 0, \quad x, y \in X \quad (\inf \emptyset = \infty).$$

Модулярные пространства для w и w^+ связаны следующим двойственным образом.

Теорема 2 ([8]). (a) $X_{w^+}^* = X_w^*$, $X_{w^+}^0 = X_w^{\text{fin}}$ и $X_{w^+}^{\text{fin}} = X_w^0$.
 (b) $d_{w^+}^0(x, y) = d_w^0(x, y)$ для всех $x, y \in X_w^*$ (и X).

Сделаем некоторые выводы из теоремы 2 на примере модуляры (2). Правая обратная для w из (2) есть строго выпуклая модуляра на $X = M^{\mathbb{N}}$ вида

$$w_{\mu}^+(x, y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{d(x_k, y_k)}{\mu^k}, \quad \mu > 0, \quad x = \{x_k\}, y = \{y_k\} \in X, \quad (4)$$

которая не удовлетворяет Δ_2 -условию на X и для которой функция $(w^+)^{x,y}$ непрерывна справа на $(0, \infty)$ для всех $x, y \in X$. Из п. 3 и теоремы 2(a) вытекает, что

$$X_{w^+}^{\text{fin}} = X_w^0 \subset X_w^* = X_{w^+}^* = X_{w^+}^0 = X_w^{\text{fin}}.$$

В частности, первые два равенства здесь и первое равенство в (4) дают альтернативное описание модулярных пространств X_w^0 и X_w^* , представленное ранее в (3):

$$x = \{x_k\} \in X_w^0 \Leftrightarrow \{\lambda^k d(x_k, x_k^{\circ})\}_{k=1}^{\infty} \text{ ограничена в } \mathbb{R} \text{ для любого } \lambda > 0;$$

$$x = \{x_k\} \in X_w^* \Leftrightarrow \{\lambda^k d(x_k, x_k^{\circ})\}_{k=1}^{\infty} \text{ ограничена в } \mathbb{R} \text{ для некоторого } \lambda > 0.$$

Для метрик $d_{w^+}^*(x, y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} (d(x_k, y_k))^{1/k} = w_1(x, y)$ и $d_{w^+}^0 = d_w^0$ (п. 4 и теорема 2(b)) имеют место неравенства (1).

Приведем пример последовательности $\{x_n\} \subset X_{w^+}^*$, которая w^+ -сходится, но не сходится по метрике $d_{w^+}^0$ ([8, p. 72]). Положим $M = \mathbb{R}$ с метрикой $d(u, v) = |u - v|$ и $x^{\circ} = 0 = \{0\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и рассмотрим $\{x_n\} \subset X_{w^+}^{\text{fin}} = X_w^0$ такую, что $x_n = (1/n, 1_2, 1_3, \dots, 1_n, 0, 0, \dots)$ (т.е. $x_n = \{x_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$, где $x_{n,1} = 1/n$, $x_{n,k} = 1$ при $2 \leq k \leq n$, и $x_{n,k} = 0$ при $k \geq n + 1$). Если $x = (0, 1, 1, 1, \dots)$, то $x \in X_{w^+}^* = X_w^*$ и $x \notin X_w^0 = X_{w^+}^{\text{fin}}$. Для $\mu = 2$ имеем $w_{\mu}^+(x_n, x) = 1/2n \rightarrow 0$, тогда как $d_{w^+}^0(x_n, x) = d_w^0(x_n, x) = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Этот пример показывает, что $X_{w^+}^{\text{fin}}$ не замкнуто относительно w^+ -сходимости и что w^+ не удовлетворяет Δ_2 -условию на X .

7. Модулярное пространство X_w^* называется w -полным (=модулярно полным), если из условия $\{x_n\} \subset X_w^*$, $\lambda > 0$ и $w_{\lambda}(x_n, x_m) \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$ следует, что найдется такой $x \in X_w^*$, что $w_{\lambda}(x_n, x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 3. Если (M, d) — полное метрическое пространство, то модулярное пространство $X_w^* = X_{w^+}^*$ для модуляры w из (2) и w^+ из (4) является полным метрическим пространством относительно метрик d_w^0 и $d_{w^+}^*$, а также w -полным и w^+ -полным.

8. В [8] в контексте пространства $X = M^{[a,b]}$ всех функций $x : [a, b] \rightarrow M$, действующих из отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ в метрическое пространство (M, d) , построены две нестрогие невыпуклые (псевдо)модуляры w на X со следующими свойствами их модулярных пространств. Для первой из них X_w^{fin} есть пространство всех регулярных функций (т.е. имеющих конечные односторонние пределы в точках $[a, b]$) и $X_w^0 = X_w^*$ есть пространство всех ограниченных функций. Для второй — X_w^0 есть пространство всех абсолютно непрерывных функций и $X_w^{\text{fin}} = X_w^*$ есть пространство всех функций ограниченной по Жордану вариации. Тем самым указанные классические пространства функций “внутренне взаимосвязаны” теснее, чем может представляться из их определений.

Статья подготовлена в результате проведения исследования № 17-01-0050 в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2017–2018 гг. и в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации "5–100".

Литература

1. Чистяков В. В. *Метрические модуляры и их применение* // Докл. РАН. – 2006. – Т. 406. – № 2. – С. 165–168.
2. Chistyakov V. V. *Modular metric spaces generated by F-modulars* // Folia Math. – 2008. – V. 15. – № 1. – P. 3–24.
3. Chistyakov V. V. *Modular metric spaces, I: Basic concepts* // Nonlinear Anal. – 2010. – V. 72. – № 1. – P. 1–14.
4. Chistyakov V. V. *Modular metric spaces, II: Application to superposition operators* // Nonlinear Anal. – 2010. – V. 72. – № 1. – P. 15–30.
5. Чистяков В. В. *Неподвижные точки модулярно сжимающих отображений* // Докл. РАН. – 2012. – Т. 445. – № 3. – С. 274–277. (Аннотация: Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2013. – Т. 46. – С. 56–62.)
6. Chistyakov V. V. *Modular contractions and their application* // In: Models, Algorithms, and Technologies for Network Analysis. Springer Proc. Math. & Stat. Vol. 32. – New York: Springer Science+Business Media, 2013. – P. 65–92.
7. Chistyakov V. V. *Modular Lipschitzian and contractive maps* // In: Optimization, Control, and Applications in the Information Age. Springer Proc. Math. & Stat. Vol. 130. – Springer International Publishing Switzerland, 2015. – P. 1–15.
8. Chistyakov V. V. *Metric Modular Spaces: Theory and Applications*. – Springer Briefs in Mathematics, Springer International Publishing Switzerland, 2015. – xiii+137 p.
9. Musielak J. *Orlicz Spaces and Modular Spaces*. – Lecture Notes in Math. V. 1034. Springer, Berlin, 1983. – 222 pp.
10. Nakano H. *Modularized Semi-Ordered Linear Spaces*. – Maruzen, Tokyo, 1950. – 288 p.

ON PROPERTIES OF MODULAR SPACES

V.V. Chistyakov

We present basic concepts of the theory of modular spaces on arbitrary sets, which extends simultaneously the theory of such spaces on linear sets and the theory of metric spaces. We study the relationship between (three) modular spaces and metrics on them in the convex and nonconvex cases. We define the modular notions of convergence, topology and completeness. We exhibit transformations of modular spaces (for the right inverse modular), connected with their duality. The assertions are illustrated by examples.

Keywords: modular, modular space, modular convergence, right inverse, Δ_2 -condition, modular completeness.