

## Литература

1. Хелемский А. Я. *Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии*. – М.: Наука, 1989. – 464 с.

### INFINITE TENSOR PRODUCTS AND CONVERGENCE ALMOST EVERYWHERE

D.V. Fufaev

*The results on summation of the Fourier series on the infinite-dimensional torus were presented, also the generalization for the case of abstract measure space was formulated.*

Keywords: Fourier series, tensor product, convergence almost everywhere.

УДК 517.55 : 517.574 : 517.987.1

### МЕРЫ ХАУСДОРФА НУЛЕВЫХ МНОЖЕСТВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА РОСТ

Б.Н. Хабибуллин<sup>1</sup>, З.Ф. Абдуллина<sup>2</sup>, А.П. Розит<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *khabib-bulat@mail.ru*; Башкирский государственный университет

<sup>2</sup> *zilya-apa@mail.ru*; Башкирский государственный университет

<sup>3</sup> *rozit@mail.ru*; Башкирский государственный университет

*Пусть  $M$  — субгармоническая функция с мерой Рисса  $\nu_M$  в области  $D$  из  $n$ -мерного комплексного евклидова пространства  $\mathbb{C}^n$ ,  $f$  — ненулевая голоморфная в  $D$  функция,  $|f| \leq \exp M$  на  $D$  и функция  $f$  обращается в нуль на множестве  $Z \subset D$ . Тогда ограничения на рост меры Рисса  $\nu_M$  функции  $M$  вблизи границы области  $D$  влекут за собой определённые ограничения на размеры или площадь/объем множества  $Z$ . Количественная форма исследования этого явления даётся в субгармоническом обрамлении.*

**Ключевые слова:** голоморфная функция, нулевое множество, субгармоническая функция, мера Рисса, мера Хаусдорфа.

Многомерные результаты об описании нулевых множеств голоморфных функций с ограничениями на рост их модуля вблизи границы  $\partial D$  области определения  $D$  до середины 1990-х гг. содержатся в книге [1], в статьях [2]– [4], обзорах [5, 6.5], [6, § 6]. Так, в случае ограниченной ненулевой голоморфной функции широкого известно, что объем ее нулевого множества ограничен (часть классической теорема Г. М Хенкина – Скоды), а в случае не более степенного роста ненулевой голоморфной функции того же порядка роста (часть теоремы Ш. М. Даутова – Скоды). Случай целых функций многих переменных достаточно полно освещён в [7]– [12]. Некоторые субгармонические многомерные результаты подобного типа получены относительно недавно в [13]. Для голоморфных и субгармонических функций в областях на комплексной плоскости С история рассматриваемой тематики достаточно детально изложена в [14]. Мы рассматриваем лишь «лёгкую часть» задачи об описании нулевых (под)множеств голоморфных функций с заданной мажорантой: необходимые условия в виде ограничений на рост «площади–объёма» нулевого множества вблизи границы области определения. Но даётся она в самой общей форме: для произвольных областей и очень широкого круга условий как по отношению ограничений на рост

модуля голоморфных функций, так и разнообразных интегральных ограничений на их нулевые множества.

Пусть  $D$  — собственная подобласть в  $\mathbb{C}_\infty^n := \mathbb{C}^n \cup \{\infty\}$  одноточечная компактификация Александра  $n$ -мерного комплексного евклидова пространства  $\mathbb{C}^n$ . Для расширенной числовой функции  $v$  (со значениями в  $[-\infty, +\infty]$ ), определённой вблизи границы  $\partial D$  запись  $\lim_{\partial D} v = 0$  будет означать, что  $\lim_{D \ni z \rightarrow \partial D} v(z) = 0$ . Пишем  $S \Subset D$ , если замыкание  $\text{clos } S$  множества  $S$  в  $\mathbb{C}_\infty^n$  содержится в  $D$ . Для меры  $\mu$  и функции  $v$  вблизи  $\partial D$  будем писать

$$\int^{\partial D} v \, d\mu \quad \text{для} \quad \int_{D \setminus S} v \, d\mu \quad \text{с каким-либо борелевским подмножеством} \quad S \Subset D,$$

когда важна лишь конечность (сходимость) интеграла, — аналог распространённой записи несобственных интегралов  $\int^\infty$  без указания нижнего предела интегрирования.

Через  $\text{sbh}(D)$  и  $\text{Hol}(D)$  обозначаем классы соответственно субгармонических и голоморфных в  $D$  функций;  $\text{sbh}^+(D)$  — подкласс положительных ( $\geq 0$ ) функций в  $\text{sbh}(D)$ ;  $\text{Zero}_f$  — дивизор нулей функции  $f \in \text{Hol}(D)$ , т. е. в определённом смысле функция кратности корней функции  $f$  в области  $D$ .

Аналог основных финитных положительных функций теории распределений Л. Шварца, или обобщённых функций, через которые определяется отношение порядка на распределениях или мерах/зарядах, здесь предоставляет

**Определение.** Субгармоническую функцию  $v \geq 0$ , определённую вблизи  $\partial D$ , при  $\lim_{\partial D} v = 0$  называем *тестовой функцией для  $D$  вблизи  $\partial D$* , а класс всех таких функций обозначаем через  $\text{sbh}_0^+(\partial D)$ . Для  $b \in [0, +\infty)$  и замкнутого в  $\mathbb{C}_\infty^n$  подмножества  $S \Subset D$ , т. е. при  $S = \text{clos } S \subset D$ , вводим подкласс тестовых функций

$$\text{sbh}_0^+(D \setminus S; \leq b) := \left\{ v \in \text{sbh}^+(D \setminus S) : \sup_{D \setminus S} v \leq b, \lim_{\partial D} v = 0 \right\}.$$

**Теорема 1** (индивидуальная). Пусть  $-\infty \neq M \in \text{sbh}(D)$  с мерой Рисса  $\nu_M$  и для расширенной числовой функции  $w$  вблизи  $\partial D$  имеем  $\int^{\partial D} w \, d\nu_M < +\infty$ ,  $0 \neq f \in \text{Hol}(D)$  и  $|f| \leq \exp M$  на  $D \subset \mathbb{C}_\infty^n$ . Тогда для любой функции  $v \in \text{sbh}_0^+(\partial D)$  при ограничении  $v \leq w$  на каком-либо борелевском множестве, на котором сосредоточена мера  $\nu_M$  вблизи  $\partial D$ , имеет место соотношение  $\int^{\partial D} v \, Z \, d\sigma_{2n-2} < +\infty$  для любого поддивизора  $Z \leq \text{Zero}_f$ .

Всюду далее предполагаем, что  $\emptyset \neq \text{int } S \subset S = \text{clos } S \subset D$ , где  $\text{int } S$  — внутренность множества  $S$  в  $\mathbb{C}_\infty^n$ . Для функции

$$w : D \setminus S \rightarrow [0, +\infty], \quad b := \sup_{z \in \partial S} \limsup_{D \ni z' \rightarrow z} w(z') < +\infty \tag{1}$$

наибольшую миноранту относительно конуса  $\text{sbh}_0(D \setminus S) := \{v \in \text{sbh}(D \setminus S) : \lim_{\partial D} v = 0\}$  определим как функцию  $\text{gm } w := \sup\{v \in \text{sbh}_0(D \setminus S) : v \leq w \text{ на } D \setminus S\}$ . При этом через  $\text{gm}^* w$  обозначаем *полунепрерывную сверху регуляризацию* функции  $\text{gm } w : D \setminus S \rightarrow [0, +\infty]$ .

**Теорема 2** (индивидуальная). Пусть  $M \in \text{sbh}(D)$  с мерой Рисса  $\nu_M$ ,  $M \neq -\infty$ ,  $w$  — полунепрерывная сверху функция из (1), удовлетворяющая одному из двух условий:

- (i)  $\lim_{\partial D} w = 0$  или (ii)  $D$  — регулярная область (для задачи Дирихле).

Пусть также  $\int_{D \setminus S} w d\nu_M < +\infty$ . Если  $0 \neq f \in \text{Hol}(D)$  и  $|f| \leq \exp M$  на  $D$ , то для любого поддивизора  $Z \leq \text{Zero}_f$  выполнено соотношение  $\int_{Z \setminus S} (\text{gm}^* w) Z d\sigma_{2n-2} < +\infty$ .

При исследовании нулевых множеств в «жестких» весовых классах голоморфных функций с более или менее явными мажорантами  $M$  возникала необходимость и в равномерных оценках сверху интегралов от функций тестового характера из некоторого класса по нулевому множеству голоморфной функции. Наиболее рельефно такой подход реализован для равномерных пространств Бергмана и им подобных в единичном круге [17, гл. 4], [18, §§ 5,6] и в единичном шаре [3]. Подобные оценки в общей ситуации даёт

**Теорема 3** (равномерная). Пусть  $z_0 \in \text{int} S \neq \emptyset$ ,  $M(z_0) \neq -\infty$  для  $M \in \text{sbh}(D)$  с рядом Рисса  $\nu_M$ ,  $b \in [0, +\infty)$ . Тогда найдутся постоянные  $C > 0$ , не зависящая от  $M$ , и  $\bar{C}_M$ , с которыми для любой ненулевой функции  $f \in \text{Hol}(D)$  с ограничением  $|f| \leq \exp M$  на  $D$ , а также для любой тестовой функции  $v \in \text{sbh}_0^+(D \setminus S; \leq b)$  выполнено неравенство

$$\int_{D \setminus S} v \text{Zero}_f d\sigma_{2n-2} \leq \int_{D \setminus S} v d\nu_M - C \log |f(z_0)| + C \bar{C}_M.$$

Теоремы 1–3 выводятся из одной общей основной теоремы, формулируемой для  $\delta$ -субгармонической мажоранты  $M$ , т. е. разности субгармонических функций. Соответствующая статья с анонсированными здесь результатами направлена в печать в 2017 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16–01–00024).

## Литература

- Гриффитс Ф., Кинг Дж. *Теория Неванлинны и голоморфные отображения алгебраических многообразий*. – Математика. Новое в зарубежной науке. – Т. 1. – М.: Мир, 1976. – 96 с.
- Даутов Ш. А., Хенкин Г. М. Нули голоморфных функций конечного порядка и весовые оценки решений  $\bar{\partial}$ -уравнений // Матем. сб. – 1978. – С. 163–174.
- Bruna J., Massaneda X. Zero sets of holomorphic functions in the unit ball with slow growth // J. Anal. Math. – 1995. – V. 66. – P. 217–252.
- Хабибуллин Б. Н. Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II // Изв. РАН. Сер. матем. – 2001. – Т. 65. – № 5. – С. 167–190.
- Хенкин Г. М. Метод интегральных представлений в комплексном анализе // Комплексный анализ – многие переменные – 1. Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. – М.: ВИНТИ, 1985. – Т. 7. – С. 23–124.
- Шведенко С. В. Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, полукруге и шаре // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. – М.: ВИНТИ, 1985. – Т. 23. – С. 3–124.
- Ронкин Л. И. *Элементы теории аналитических функций многих переменных*. – Киев: Наукова думка, 1977.

8. Ронкин Л. И. *Целые функции* // Комплексный анализ – многие переменные – 3. Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. – М.: ВИНТИ, 1986. – Т. 9. – С. 5–36.
9. Лелон П., Груман Л. *Целые функции многих переменных*. – М.: Мир, 1989.
10. Ronkin L. I. *Functions of Completely Regular Growth*. – Dordrecht/Boston/London: Kluwer Acad. Publ. Math. and Its Appl. (Soviet Series), 1992.
11. Хабибуллин Б. Н. *Полнота систем целых функций в пространствах голоморфных функций* // Матем. заметки. – 1999. – Т. 66. – № 4. – С. 603–616.
12. Хабибуллин Б. Н. *Полнота систем экспонент и множества единственности*. – Уфа: РИЦ БашГУ, издание четвертое (1-ое – 2006; 2-ое – 2008; 3-е – 2011), дополненное. – 2012. – 192 с.
13. Фаворов С. Ю., Радченко Л. Д. *Мера Рисса функций, субгармонических во внешности компакта* // Математичні Студії. – 2013. – Т. 40. – № 2. – С. 149–158.
14. Хабибуллин Б. Н., Таминдарова Н. Р. *Распределение нулей и масс голоморфных и субгармонических функций. I. Условия типа Адамара и Бляшке* // Матем. сб. – 2017 (направлено в печать). – 71 с. – <http://arxiv.org/pdf/1512.04610v2.pdf> [math.CV]
15. Khabibullin B., Tamindarova N. *Distribution of Zeros for Holomorphic Functions: Hadamard- and Blaschke-type Conditions* / Abstracts of International Workshop on “Non-harmonic Analysis and Differential Operators”. – Baku, Azerbaijan: Institute of Mathematics and Mechanics of Azerbaijan National Academy of Sciences, 2016. – P. 63.
16. Khabibullin B., Tamindarova N. *Uniqueness Theorems for Subharmonic and Holomorphic Functions of Several Variables on a Domain* // Azerbaijan Journal of Mathematics. – 2017. – V. 7 – № 1. – P. 70–79.
17. Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K. *Theory of Bergman spaces*. – Graduate Texts in Mathematics. – V. 199. – N.-Y.: Springer-Verlag, 2000.
18. Кудашева Е. Г., Хабибуллин Б. Н. *Распределение нулей голоморфных функций умеренного роста в единичном круге и представление в нем мероморфных функций* // Матем. сб. – 2009. – Т. 200. – № 9. – С. 95–126.

## THE HAUSDORFF MEASURE OF ZERO SETS OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS WITH RESTRICTIONS ON GROWTH

B.N. Khabibullin, Z.F. Abdullina, A.P. Rozit

*Let  $M$  be a subharmonic function with the Riesz measure  $\nu_M$  on a domain  $D$  of the  $n$ -dimensional complex Euclidean space  $\mathbb{C}^n$ ,  $f$  a non-zero holomorphic in  $D$ . Suppose that  $|f| \leq \exp M$  on  $D$  and the function  $f$  vanishes on the set  $Z \subset D$ . Then restrictions on the growth of the Riesz measure  $\nu_M$  of the function  $M$  near the boundary of the domain  $D$  entail certain restrictions on dimensions or area/volume of the set  $Z$ . A quantitative form of research of this phenomenon is given in the subharmonic frame.*

Keywords: holomorphic function, zero set, subharmonic function, Riesz measure, Hausdorff measure.