

4. Aubin J.-P., Frankovska H. *Set-Valued Analysis*. – Boston–Basel–Berlin: Birkhäuser, 1990.
5. Polovinkin E. S. *Differential Inclusions with Measurable-Pseudo-Lipschitz Right-hand Side* // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2013. – V. 283. – P. 116–135.
6. Polovinkin E. S. *Calculation of Subdifferentials for the Difference of Two Convex Functions* // J. of Convex Analysis. – 2017. – V. 24, No. 1. – P. 286–303.

CALCULATION OF SUBDIFFERENTIALS FOR THE DIFFERENCE OF CONVEX FUNCTIONS

E.S. Polovinkin

It is shown that for some classes of functions all epiderivatives and subdifferentials of F. H. Clarke, P. Michel - J.-P. Penot type and others coincide. Several rules of calculation of subdifferentials for the difference of two convex functions are obtained. Some examples are considered.

Keywords: nonsmooth analysis, convex function, semiregular function, directional derivatives, subdifferentials.

УДК 514.752, 514.764.274, 517.97

УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Н.М. Полубоярова¹

¹ natasha_medvedeva@volsu.ru; Волгоградский государственный университет

В работе описывается получение условия устойчивости экстремальной поверхности. Поскольку экстремали рассматриваемых в работе функционалов моделируют, например, физические равновесные жидкости в гравитационном поле с потенциалом, тензорные покрытия, то весьма актуальной является задача определения их устойчивости.

Ключевые слова: вариация функционала, экстремальная поверхность, функционал типа площади, функционал объемной плотности сил, функционал потенциальной энергии, устойчивость.

Введение

В работе представлено исследование устойчивости экстремалей функционала потенциальной энергии. Так же как минимальные поверхности суть экстремали функционала площади, так и рассматриваемые нами гладкие поверхности – экстремали специального функционала, который является линейной комбинацией функционала типа площади и функционала от объемной плотности сил.

Подобные экстремальные поверхности моделируют состояния равновесных жидкостей в гравитационном поле с потенциалом, тензорные покрытия, магнитные жидкости, капиллярные поверхности. Поэтому их изучение на устойчивость и неустойчивость не теряет актуальности, а исследуемые функционалы усложняются, чтобы вместить больше информации о физических характеристиках системы.

Области устойчивости и неустойчивости минимальных поверхностей искали различными методами, как аналитическими, например, с помощью вариаций

функционала площади, индексов поверхностей, так и с применением геометрических свойств поверхностей, например, с применением отображений и модульно-емкостной техники. Имеется широкий спектр работ, посвященных исследованию устойчивости минимальных поверхностей в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах, в частности, работы Ю. А. Аминова, В. А. Клячина, В. М. Миклюкова, А. В. Погорелова, В. Г. Ткачева, А. А. Тужилина, А. Т. Фоменко, М. до Кармо, Ч. К. Пенга, Ш. Яу, Р. Финна, Дж. Саймонса и др.

В этой работе предлагается ввести величину, похожую на основную частоту, при помощи которой задача устойчивости сводится к поиску решения дифференциального неравенства. В [1] показано, что в метрике поверхности существует решение уравнения Якоби.

Постановка задачи

Пусть M – n -мерное связное ориентируемое многообразие класса C^2 . Рассмотрим ориентируемую гиперповерхность $\mathcal{M} = (M, u)$, полученную C^2 -погружением $u : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ некоторая область, такая что $\mathcal{M} \subset \partial\Omega$; $\Phi, \Psi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ – C^2 -гладкие функции. Если ξ поле единичных нормалей к поверхности \mathcal{M} , то для любой C^2 -гладкой поверхности \mathcal{M} определена величина

$$W(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} \Phi(\xi) d\mathcal{M} + \int_{\Omega} \Psi(x) dx, \quad (1)$$

которая не зависит от выбора нормали ξ . Функционал (1) назовем функционалом потенциальной энергии.

Поверхность \mathcal{M} является *экстремальной*, если первая вариация функционала (1) равна нулю при всех бесконечно малых деформациях поверхности \mathcal{M} . Экстремальная поверхность \mathcal{M} *устойчива*, если вторая вариация функционала (1) знакоопределена при всех бесконечно малых деформациях поверхности \mathcal{M} , иначе – *неустойчива*.

Обозначим

$$G = \{G_{ij}\}_{i,j=1}^{n+1}, \quad G_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \delta_{ij}(\Phi - \langle D\Phi, \xi \rangle), \quad (2)$$

где $D\Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_{n+1}} \right)$, δ_{ij} – символ Кронекера; k_i – главные кривизны; E_i – главные направления поверхности.

Теорема 1. Если $W(t) = W(\mathcal{M}_t)$, то

$$W'(0) = \int_{\mathcal{M}} (\operatorname{div}(D\Phi(\xi))^T - nH\Phi(\xi) + \Psi(x))h(x) d\mathcal{M},$$

где div – дивергенция в метрике поверхности \mathcal{M} , $H = \langle \vec{H}, \xi \rangle$ – средняя кривизна поверхности \mathcal{M} относительно нормали ξ . Более того, если $W'(0) = 0$ для любой функции $h(x) \in C_0^1(\mathcal{M})$, то выполнено

$$W''(0) = \int_{\mathcal{M}} \left\{ G(\nabla h, \nabla h) + h^2 \left(\langle \bar{\nabla} \Psi(x), \xi \rangle - \sum_{i=1}^n k_i^2 G(E_i, E_i) \right) \right\} d\mathcal{M}, \quad (3)$$

где G – квадратичная форма, соответствующая матрице (2).

Замечание. Вариации для функционала типа площади были получены в [2].

Признак устойчивости экстремальной поверхности

Далее будем полагать, что матрица G из (2) положительно определена и $\langle \bar{\nabla}\Psi, \xi \rangle \leq 0$. Введем величину

$$\mu(\mathcal{M}) = \inf_{\mathcal{M}} \frac{\int G(\nabla h, \nabla h) d\mathcal{M}}{\int Q h^2 d\mathcal{M}},$$

где $Q = \sum_{i=1}^n k_i^2 G(E_i, E_i) - \langle \bar{\nabla}\Psi, \xi \rangle$, а точная нижняя грань взята по всем липшицевым функциям $h(m) : M \rightarrow \mathbb{R}$ таким, что $\int_{\mathcal{M}} h(m) d\mathcal{M} = 0$.

Поскольку (3) выполнено для любой функции $h(x) \in C_0^1(\mathcal{M})$, то для определенности запишем условие в виде

$$h(x)|_{\partial\mathcal{M}} = 0, \quad \int_{\mathcal{M}} h(x) d\mathcal{M} = 0.$$

Пусть λ и Λ – минимальное и максимальное по модулю собственные значения матрицы (2). Тогда справедлива

Теорема 2. Если найдется положительная C^2 -функция $u(x) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая в метрике поверхности \mathcal{M} дифференциальному неравенству

$$\Delta u(x) \leq -\frac{Q}{\lambda} u(x),$$

то $\mu(\mathcal{M}) \geq 1$ и поверхность \mathcal{M} устойчива.

Замечание. В [3] был доказан результат аналогичный теореме 2 для другого функционала на поверхностях постоянной средней кривизны.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-02479 p_поволжье_a).

Литература

1. Simons J. *Minimal varieties in riemannian manifolds* // Ann. of Math. – 1968. – V. 88, № 1. – P. 62–105.
2. Клячин В. А., Медведева Н. М. Об устойчивости экстремальных поверхностей некоторых функционалов типа площади // Сиб. электр. матем. известия. Статьи. – 2007. – Т. 4. – С. 113–132.
3. Клячин В. А. О некоторых свойствах устойчивых и неустойчивых поверхностей предписанной средней кривизны // Изв. РАН. Сер. матем. – 2006. – Т. 70. – № 4. – С. 77–90.

A CONDITION FOR STABILITY OF EXTREMAL SURFACES

N.M. Poluboyarova

We obtain a condition of stability for an extremal surface. The extremals of the studied functional

simulate, for example, states of equilibrium liquids in a gravitational field with a potential and awning coverings. Therefore, the problem of their stability is important.

Keywords: the variation of functional, extreme surface, functional type area, volumetric power density functional, the functional of potential energy, the stability.

УДК 517.54

ГИПОТЕЗА БОМБИЕРИ ДЛЯ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ КРУГА

Д.В. Прохоров¹

¹ *prokhorovdv@info.sgu.ru*; Саратовский государственный университет, Петрозаводский государственный университет

Числа Бомбиери σ_{mn} характеризуют поведение тела коэффициентов для класса S всех голоморфных и однолистных в единичном круге функций f , нормированных разложением $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$. Число σ_{mn} вычисляется как предел отношения $\operatorname{Re}(n - a_n)$ и $\operatorname{Re}(m - a_m)$ при f , стремящемся к функции Кебе $K(z) = z(1 - z)^{-2}$. В частности, $\sigma_{23} = 0$. Мы определяем аналогичные числа $\sigma_{mn}(M)$ для класса $S(M) \subset S$ ограниченных функций $|f(z)| < M$, $|z| < 1$, $M > 1$, с пределом отношения $\operatorname{Re}(p_n(M) - a_n)$ и $\operatorname{Re}(p_m(M) - a_m)$ при f , стремящемся к функции Пика $P_M(z) = MK^{-1}(K(z)/M) = z + \sum_{n=2}^{\infty} p_n(M)z^n$. Мы доказываем, что $\sigma_{23}(M) = -4/M$, $M > 1$. Это совместная работа с В. Г. Гордиенко.

Ключевые слова: однолистная функция, число Бомбиери, функция Кебе, функция Пика.

Пусть S обозначает класс всех голоморфных и однолистных в единичном круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функций

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n.$$

В течение долгой истории теории однолистных функций знаменитая функция Кебе

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n \in S$$

оказывалась экстремальной во многих задачах на классе S .

Э. Бомбиери [2] доказал локальную гипотезу Бибербаха об оценке $|a_n| \leq n$, $n \geq 2$, в классе S и в той же статье поставил задачу найти числа, называемые сейчас числами Бомбиери,

$$\sigma_{mn} := \liminf_{a_m \rightarrow m} \frac{n - \operatorname{Re} a_n}{m - \operatorname{Re} a_m} = \liminf_{S \ni f \rightarrow K} \frac{n - \operatorname{Re} a_n}{m - \operatorname{Re} a_m}, \quad m, n \geq 2, \quad (1)$$

где f стремится к K локально равномерно внутри \mathbb{D} . Выполнив так называемые вещественные вариации в окрестности функции Кебе, Бомбиери выдвинул гипотезу, что $\sigma_{mn} = B_{mn}$, где

$$B_{mn} := \min_{\theta \in [0, 2\pi]} \frac{n \sin \theta - \sin(n\theta)}{m \sin \theta - \sin(m\theta)},$$

и доказал, что $\sigma_{mn} \leq B_{mn}$ для $m = 3$ и нечетных n , см. также результаты в [4] и [5]. Бштути и Хенгартнер [5] доказали гипотезу Бомбиери в классе S_R функций $f \in S$ с