7. Пиров Р. *Исследование некоторых нелинейных переопределённых систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными функциями на плоскости* // Докл. АН Тадж. ССР. – 1983. – Т. 26, № 12. – С. 747–750.

8. Пиров Р. *О некоторых нелинейных системах четырёх уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными функциями от трёх переменных* // Докл. АН Тадж. ССР. – 1987. – Т. 30, № 3. – С. 145–149.

9. Пиров Р. Автореф. дис... канд. физ.-мат. наук. – Душанбе, 1984. – 11 с.

10. Пиров Р. *Об условиях совместности и многообразиях решений некоторых классов переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка* // Уфимский матем. журнал. – 2016. – Т. 8, № 2. – С. 59-66.

THEORY OF SOME OVERDETERMINED SYSTEMS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FIRST AND SECOND ORDER

R. Pirov

*Quasilinear and nonlinear systems of the first and second order partial differential equations with one and two unknown functions are considered. Explicit compatibility conditions are obtained ensuring unambiguous solvability of problems for the systems with initial data.*

Keywords: overdetermined sistems, compaibility conditions, manifolds of solutions, cross diffrention.

УДК 517.977

## ВЫЧИСЛЕНИЕ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ДЛЯ РАЗНОСТИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Е.С. Половинкин[1]

1 *polovinkin.es@mipt.ru*; Московский физико-технический институт

*При исследовании негладких непрерывных функций $f : X \to \mathbb{R}^1$ на локальный минимум или максимум в некоторой точке $x_0 \in X$ необходимое условие экстремума принимает вид включения: $0 \in \partial_C f(x_0)$, где $\partial_C f(x_0)$ означает субдифференциал Кларка. В более сложных задачах математической теории управления также возникает необходимость вычисления субдифференциалов типа субдифференциала Кларка. Однако вычисление этих субдифференциалов для негладкой и невыпуклой функции само является не простой задачей. В данном докладе выявлен достаточно широкий класс негладких функций, которые мы назвали слабо регулярными функциями, для которого получены формулы вычисления различных производных по направлениям, а с ними и субдифференциалов, включая субдифференциалы Кларка, Мишеля-Пено и другие. В частности это позволяет вычислять субдифференциалы для функций, представимых в виде разности двух локально липшицевых выпуклых функций.*

**Ключевые слова**: негладкий анализ, выпуклая функция, слабо регулярная функция, производная по направлениям, субдифференциал Кларка.

Пусть $X$ — действительное банахово пространство. Через $B_r(x_0) \doteq \{x \in X \mid \|x - x_0\| < r\}$ обозначаем открытый шар с центром в точке $x_0$ радиуса $r > 0$ в пространстве $X$. Для всякой функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ определим множество $\operatorname{dom} f := \{x \in X \mid f(x) \neq \infty\}$.

Как обычно, классическую производную функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$ по направлению $u \in X$ определяем из выражения

$$f'(x_0, u) := \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1}(f(x_0 + \lambda u) - f(x_0)).$$

Также рассмотрим следующие определения $M$-производных для локально липшицевой функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$ по направлению $u \in X$, где индекс $M$ выбирается из множества $\{U, L, C, AL, MP\}$, индекс "$U$" обозначает верхнюю производную [1, 2, 5], индекс "$L$" – нижнюю [2, 5], индекс "$C$" – производную Кларка [1, 2], индекс "$AL$" – асимптотически нижнюю [4, 5], индекс "$MP$" – производную Мишеля-Пено [3, 5]. Таким образом получаем

**Определение 1.** *Каждая $M$-производная (где $M \in \{U, L, C, AL, MP\}$) функции $f$ в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$ по направлению $u \in X$ определяется следующими выражениями*

$$D^+_U f(x_0)(u) := \liminf_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1}(f(x_0 + \lambda u) - f(x_0)),$$

$$D^+_L f(x_0)(u) := \limsup_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1}(f(x_0 + \lambda u) - f(x_0)),$$

$$D^+_C f(x_0)(u) := \limsup_{\substack{\lambda, x:\\ \lambda \downarrow 0, x \to x_0}} \lambda^{-1}(f(x + \lambda u) - f(x)),$$

$$D^+_{AL} f(x_0)(u) := \sup_{w \in X}(D^+_L f(x_0)(u + w) - D^+_L f(x_0)(w)),$$

$$D^+_{MP} f(x_0)(u) := \sup_{w \in X}\{\limsup_{\lambda \downarrow 0}(\lambda^{-1}(f(x_0 + \lambda(u + w)) - f(x_0 + \lambda w)))\}.$$

**Определение 2.** *$M$-субдифференциалом функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$ (для любого индекса $M \in \{C, MP, AL\}$) называется множество из сопряженного пространства $X^*$, задаваемое по формуле*

$$\partial^+_M f(x_0) := \{p \in X^* \mid \langle p, x\rangle \le D^+_M f(x_0)(x) \quad \forall\, x \in X\}.$$

**Лемма 1.** *Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ – локально липшицевая в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$ функция. Допустим, что для всех $u \in X$ существуют конечные классические производные по направлениям в точке $x_0$, т.е.*

$$f'(x_0, u) = D^+_L\, f(x_0)(u) = D^+_U\, f(x_0)(u), \quad \forall\, u \in X.$$

*Тогда $M$-производные $D^+_M\, f(x_0)(u)$ для $M \in \{MP, AL\}$ совпадают при всех $u \in X$, и справедлива формула*

$$D^+_M f(x_0)(u) = \sup_{w \in X}(f'(x_0, u + w) - f'(x_0, w)).$$

**Теорема 1.** *Пусть функция $f\colon B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$ такова, что существуют две непрерывные выпуклые функции $f_1, f_2 : B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$ такие, что $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ для всех $x \in B_r(x_0)$, а для некоторого $u \in X$ одна из функций $f_k$, $k \in \overline{1, 2}$, удовлетворяет условию $f'_k(x_0, u) + f'_k(x_0, -u) = 0$ (например, если функция дифференцируема по Гато в точке*

*$x_0$). Тогда для этого $u \in X$ и для всех $M \in \{C, MP, AL\}$, $M$-производные $D_M^+ f(x_0)(u)$ совпадают, и справедлива следующая формула*

$$D_M^+ f(x_0)(u) = f_1'(x_0, u) + f_2'(x_0, -u).$$

**Определение 3.** *Для непрерывной функции $f : B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$, у которой существует конечная классическая производная по всем направлениям в точке $x_0 \in X$, определим на $B_r(x_0)$ функции $g$ и $\varphi$ по формулам*

$$g(x) := f(x_0) + f'(x_0, x - x_0), \quad \varphi(x) := f(x) - g(x). \tag{1}$$

Таким образом, функция $f$ в окрестности $B_r(x_0)$ точки $x_0$ представлена как сумма ее квазилинейной части $g$ и $o$-малого остатка $\varphi$. Очевидно, что функции $g$ и $\varphi$ в точке $x_0$ имеют конечные классические производные по направлениям, и, кроме того, справедливы равенства

$$g'(x_0, u) = f'(x_0, u), \quad \varphi'(x_0, u) = 0 \quad \forall u \in X.$$

Более того, для всех $u \in X$ очевидно справедливы следующие неравенства

$$D_C^+ f(x_0)(u) \geq D_{AL}^+ f(x_0)(u) = D_{AL}^+ g(x_0)(u) = D_C^+ g(x_0)(u) \geq f'(x_0, u),$$

$$D_{MP}^+ \varphi(x_0)(u) = 0,$$

из которых, в частности, следует неравенство $0 \leq D_C^+ \varphi(x_0)(u)$ при всех $u \in X$, что эквивалентно неравенству $0 \in \partial_C^+ \varphi(x_0)$.

**Определение 4.** *Непрерывная функция $f : B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$ называется слабо регулярной в точке $x_0 \in X$, если она имеет в точке $x_0$ конечную классическую производную по направлениям, а соответствующая функция $\varphi$, определенная в (1), удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности точки $x_0$ и справедливо равенство $\partial_C^+ \varphi(x_0) = \{0\}$, т.е. $D_C^+ \varphi(x_0)(u) = 0$ при всех $u \in X$.*

Приведем некоторые классы слабо регулярных функций.

1) Всякая положительно однородная непрерывная функция является слабо регулярной в точке $0 \in X$, так как соответствующая ей по (1) функция $\varphi(u) = 0$.

2) Всякая непрерывная функция, которая в точке $x_0$ имеет конечную производную по направлениям, и для которой соответствующая функция $\varphi$ из (1) является выпуклой (или вогнутой) и ограниченной в некоторой окрестности точки $x_0$, является слабо регулярной в этой точке.

3) Локально выпуклая (или локально вогнутая) непрерывная функция $f$ является слабо регулярной в точке $x_0$, если для всех $u \in X$ справедливо равенство $f'(x_0, u) + f'(x_0, -u) = 0$. В частности, всякая локально выпуклая (или локально вогнутая) функция, дифференцируемая в точке $x_0$ по Гато, является слабо регулярной в этой точке.

4) Всякая непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}^1$, сильно дифференцируемая в точке $x_0$, является слабо регулярной в точке $x_0$.

В то же время, невыпуклая (и невогнутая) функция, дифференцируемая в точке $x_0$ по Фреше, может оказаться не слабо регулярной в этой точке. Например, функция $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ вида $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ для $x \neq 0$ и $f(0) = 0$ является дифференцируемой, но она не является слабо регулярной в нуле, так как здесь $f'(0,u) = 0$, $\varphi(x) = f(x)$ и $D_C^+\varphi(0)(u) = |u|$ для всех $u \in \mathbb{R}^1$.

Множество всех слабо регулярных функций вида $f : X \to \mathbb{R}^1$ образует алгебру функций, т.е. справедлива следующая

**Теорема 2.** *Пусть числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$, а функции $f, g : X \to \mathbb{R}^1$ слабо регулярны в точке $x_0 \in X$. Тогда также будут слабо регулярными в точке $x_0$ следующие функции:*

$$1.\quad \alpha f + \beta g; \qquad 2.\quad f \cdot g; \qquad 3.\quad \frac{f}{g}, \quad \textit{если} \quad g(x_0) \neq 0.$$

Основное свойство слабо регулярных функций содержится в следующей теореме.

**Теорема 3.** *Пусть функция $f : B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$ является слабо регулярной в точке $x_0$. Тогда для любого $M \in \{C, MP, AL\}$ все $M$-производные функции $f$ совпадают, при этом справедливо равенство*

$$D_M^+ f(x_0)(u) = \sup_{w \in X}(f'(x_0, u+w) - f'(x_0, w)), \quad \forall u \in X.$$

*При этом равенство производных влечет равенство субдифференциалов $\partial_C^+ f(x_0) = \partial_{MP}^+ f(x_0) = \partial_{AL}^+ f(x_0)$.*

**Следствие.** *Пусть функция $f \colon X \to \mathbb{R}^1$ представима в окрестности точки $x_0$ в виде разности двух выпуклых слабо регулярных функций $f_1$ и $f_2$, т.е. $f = f_1 - f_2$. Тогда все $M$-производные функции $f$ в точке $x_0$ совпадают, т.е. для любого $M \in \{C, MP, AL\}$ справедливо равенство*

$$D_M^+ f(x_0)(u) = \sup_{w \in X}(f'(x_0, u+w) - f'(x_0, w)), \quad \forall u \in X,$$

*которое влечет равенство субдифференциалов $\partial_C^+ f(x_0) = \partial_{MP}^+ f(x_0) = \partial_{AL}^+ f(x_0)$.*

В докладе приводятся качественные примеры невыпуклых положительно однородных функций, для которых вычислены $M$-субдифференциалы. Также приведен пример выпуклой функции, которая не является слабо регулярной в некоторых точках. Этот пример показывает, что из регулярности функции по Кларку (какой является всякая выпуклая функция) может не следовать слабая регулярность этой функции. Верно также и то, что из слабой регулярности функции может не следовать ее регулярность по Кларку. Полное доказательство всех результатов можно найти в работе [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00259a).

## Литература

1. Clarke F. H. *Generalized Gradients and Applications* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1975. – V. 205. – P. 247–262.

2. Clarke F. H. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. – New York: Wiley–Interscience, 1983.

3. Michel P., Penot J.-P. *Calcul sous-différentiel pour les fonctions lipschitziennes et non-lipschitziennes* // C. R. Acad. Sc. Paris. Ser. I. – 1984. – V. 298. – P. 269–272.

4. Aubin J.-P., Frankovska H. *Set-Valued Analisys*. – Boston-Basel-Berlin: Birkhäuser, 1990.

5. Polovinkin E. S. *Differential Inclusions with Measurable-Pseudo-Lipschitz Right-hand Side* // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2013. – V. 283. – P. 116–135.

6. Polovinkin E. S. *Calculation of Subdifferentials for the Difference of Two Convex Functions* // J. of Convex Analysis. – 2017. – V. 24, No. 1. – P. 286–303.

CALCULATION OF SUBDIFFERENTIALS FOR THE DIFFERENCE OF CONVEX FUNCTIONS

E.S. Polovinkin

*It is shown that for some classes of functions all epiderivatives and subdifferentials of F. H. Clarke, P. Michel - J.-P.Penot type and others coincide. Several rules of calculation of subdifferentials for the difference of two convex functions are obtained. Some examples are considered.*

Keywords: nonsmooth analysis, convex function, semiregular function, directional derivatives, subdifferentials.

УДК 514.752, 514.764.274, 517.97

## УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Н.М. Полубоярова[1]

1 *natasha_medvedeva@volsu.ru*; Волгоградский государственный университет

*В работе описывается получение условия устойчивости экстремальной поверхности. Поскольку экстремали рассматриваемых в работе функционалов моделируют, например, физические равновесные жидкости в гравитационном поле с потенциалом, тентовые покрытия, то весьма актуальной является задача определения их устойчивости.*

**Ключевые слова**: вариация функционала, экстремальная поверхность, функционал типа площади, функционал объемной плотности сил, функционал потенциальной энергии, устойчивость.

### Введение

В работе представлено исследование устойчивости экстремалей функционала потенциальной энергии. Так же как минимальные поверхности суть экстремали функционала площади, так и рассматриваемые нами гладкие поверхности – экстремали специального функционала, который является линейной комбинацией функционала типа площади и функционала от объемной плотности сил.

Подобные экстремальные поверхности моделируют состояния равновесных жидкостей в гравитационном поле с потенциалом, тентовые покрытия, магнитные жидкости, капиллярные поверхности. Поэтому их изучение на устойчивость и неустойчивость не теряет актуальности, а исследуемые функционалы усложняются, чтобы вместить больше информации о физических характеристик системы.

Области устойчивости и неустойчивости минимальных поверхностей искали различными методами, как аналитическими, например, с помощью вариаций