Теорема 2. *Пусть модель $\sigma \in \Sigma$ удовлетворяет условиям:*
1) $\tilde{\alpha}(\sigma) > \tilde{\beta}(\sigma)$;
2) $\tilde{\gamma}(\sigma) < \tilde{\alpha}(\sigma) - \tilde{\beta}(\sigma)$.
Тогда в исследуемой модели существует вектор равновесных цен $p = (p_1, ..., p_n)$ такой, что $c_{i1} < p_i < c_{i2}$, $i = \overline{1, n}$.

Доказательство основано на применении теоремы 1 и лемм 1-3 из [1] к отображениям спроса и предложения в исследуемой модели.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00849).

Литература

1. Арутюнов А.В., Павлова Н.Г., Шананин А.А. *Равновесные цены в одной модели экономического равновесия* // Матем. моделирование. – 2016. – Т. 28. – № 3. – С. 3–22.

2. Арутюнов А.В. *Точки совпадения двух отображений* // Функц. анализ и его прил. – 2014. – Т. 48. – № 1. – С. 89–93.

APPLICATION OF THE COVERING MAPPINGS THEORY TO STUDY OF ECONOMIC MODELS

N.G. Pavlova

We study the existence of equilibrium price vector in a concurrent equilibrium model. In this model, the demand function is obtained as the solution of the problem of maximizing the utility function under budget constraints, and the supply function is obtained as the solution of the problem of profit maximization given transaction losses on the technology set. We establish sufficient conditions for the existence of equilibrium price vector. These conditions are consequences of general existence theorems for coincidence points of a Lipschitz and covering mappings.

Keywords: economic equilibrium, transaction costs, coincidence points.

УДК 517.956

ТЕОРИЯ НЕКОТОРЫХ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ

Р. Пиров[1]

1 *pirov _60@mail.ru*; Таджикский государственный педагогический Университет имени С. Айни

Рассматриваются квазилинейные и нелинейные системы дифференциальных уравнении в частных производных первого и второго порядков с одной и двумя неизвестными функциями. Получены явные условии совместности, обеспечивающее однозначную разрешимости задач с начальными данными.

Ключевые слова: переопределенные системы, условия совместности, многообразия решений, операции перекрестного дифференцирования.

1. В последние десятилетия достаточно широко изучались регулярные системы вида

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_j} = f^{kj}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n; U_1, U_2, U_3, ..., U_m), k = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, \tag{1}$$

в которых задаются производные от всех функций по переменным. Такие системы называют системами в полных дифференциалах. Если все равенства перекрестного дифференцирования выполняются тождественно относительно искомых функций, то система называется полной. Многообразие решений, содержащее не более чем конечное число произвольных постоянных, называется тривиальным. Для существования решений системы (1) необходимо и достаточно, чтобы она была полной.

2. Рассмотрим квазилинейную систему [2]

$$U_x, U_y, V_x = f^i(x, y; U, V), \;\; i = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Если все $f^i \in C^1$, то совершая операцию перекрестного дифференцирования и предполагая $f_V^1 \neq 0$, получим

$$V_y = f^4(x, y; U, V). \tag{3}$$

Тем самым мы приходим к системе четырёх уравнений, по форме, совпадающей с системой в полных дифференциалах. Следующая операция перекрестного дифференцирования 3-го уравнения из (2) с уравнением (3) приводит к функциональному соотношению

$$H(x, y; U, V) = 0. \tag{4}$$

Если (4) выполняется тождественно по U, V, тогда (2), (3) – вполне интегрируемая система в полных дифференциалах, и для неё справедлива известная теорема существования и единственности задачи с начальными данными

$$[U]_0 = c_1, \;\; [V]_0 = c_2 \tag{5}$$

(индексом "ноль" здесь и всюду ниже обозначаем значение функций в начальной точке (x_0, y_0)). В этом случае типичной является возможность разрешения (4) в виде $V = \psi(x, y, U), \psi \in C^1$. Тогда это соотношение преобразует систему (2), (3) к системе в полных дифференциалах для $U = U(x, y)$, а последние два уравнения превратятся в условия полной интегрируемости. Эти результаты составляют содержание теоремы о существовании и единственности задачи

$$[U]_0 = c_1. \tag{6}$$

Дальнейшие исследования относятся к случаям системы (2), когда первое уравнение содержит только одну искомую функцию U. В данной ситуации перекрестное дифференцирование двух первых уравнений после подстановки Vx из третьего сразу приводит к функциональному соотношению

$$h(x, y; U, V) = 0, \tag{7}$$

причём, если считать заданными два первых уравнения, то из них можно воспроизвести третье уравнение. Имеются два различных подслучая: 1) когда (7) выполняется тождественно по U, V и 2) когда (7) выполняется не тождественно. В случае 1) мы приходим к системе двух уравнений, где второе уравнение позволяет выражать вторую функцию через первую, после чего будет только одно уравнение. Таким образом, получается, что в этом случае для системы (2) надо ставить задачу

$$[U]_x = x_0 = \varphi(y), \;\; \varphi \in C^1, \tag{8}$$

которая будет иметь решение и притом единственное.
3. В монографии [2] рассматривались системы уравнений в частных производных первого порядка с одной неизвестной функцией. В [4] и [5] изучены некоторые квазилинейные системы второго порядка с одной неизвестной функцией. Эти исследования были продолжены в работах [6] - [8]. В данной работе рассматриваются нелинейные системы четырех д.у. второго порядка, где неизвестная функция зависит от трех независимых переменных, а правые части содержат нелинейным образом одну или две из производных $U_{xx}, U_{yy}, U_{zz}, U_{xy}, U_{yz}, U_{xz}$. Ограничимся рассмотрением по одной системе из каждой группы, а именно:

$$U_{xx}, U_{xy}, U_{xz}, U_{yz} = f^i(x, y, z, U, U_x, U_y, U_z, U_{yy}),\ i = \overline{1,4}. \tag{9}$$

В этой системе $U = U(x, y, z)$ – неизвестная функция, которая ищется в классе $C^4(\prod_0)$; здесь

$$\Pi_0 = \{(x, y, z) : |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le a, |z - z_0| \le a\}$$

при некотором $a > 0$. Основной метод исследования вышеуказанных систем состоит в замене производных первого и второго порядков на новые неизвестные функции, переходе к системам с большим числом неизвестных и в установлении связей с достаточно изученными (см., например, [9]) системами в полных дифференциалах (п.д.-системы).

Получены следующие результаты: пусть $f^i \in C^2(\Pi)$, при $f^2_W \ne 0$ и $f^2_\tau \cdot f^4_\tau - f^3_\tau \ne 0$. Если тождественно относительно U, U_x, U_y, U_z, U_{yy} выполняются девять условий (см. (2.8) из [10]) и $\alpha < \min(a; \frac{b}{M}, M = \max|f^i|$, то на $\Pi(\alpha, b)$, задача (9) с начальными условиями $[U]_0 = c_1, [U_x]_0 = c_2, [U_y]_0 = c_3, [U_z]_0 = c_4, [U_{yy}]_0 = c_5$ в классе $C^4(\Pi_0)$ разрешима единственным образом.

Пример. $U_{xx} = U_{yy}, U_{xy} = U_z, U_{xy} = -U_{yy}, U_{yz} = -U_{yy}$. Тогда

$$U(x, y, z) = c_1 e^{-x-y+z} + c_2(xy + z) + c_3 y + c_4 x + c_5.$$

Литература

1. Смирнов В.И. *Курс высшей математики*. Т. IV. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.

2. Михайлов Л.Г., Пиров Р. *О некоторых квазилинейных переопределённых системах уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями* // Докл. АН Тадж. ССР. – 1981. – Т. 24, № 2. – С. 90-93.

3. Goursat E. *Lecons sur l'inteqration des equations aux derivees partielles du premier ordre*. – Paris, 1921. – 454 p.

4. Пиров Р. *О некоторых линейных системах трёх дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными функциями* // Докл. АН Тадж. ССР. – 1982. – Т. 25, № 1. – С. 10–14.

5. Пиров Р. *О некоторых линейных системах трёх дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными функциями на плоскости* // Докл. АН Тадж. ССР. – 1983. – Т. 26, №3. – С. 138–142.

6. Пиров Р. *Исследование общей линейной системы трёх дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными функциями на плоскости* // Тез. Респ. научн. конф. по уравн. матем. физики. – Душанбе, 1983. – С. 35–37.

7. Пиров Р. *Исследование некоторых нелинейных переопределённых систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными функциями на плоскости* // Докл. АН Тадж. ССР. – 1983. – Т. 26, № 12. – С. 747–750.

8. Пиров Р. *О некоторых нелинейных системах четырёх уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными функциями от трёх переменных* // Докл. АН Тадж. ССР. – 1987. – Т. 30, № 3. – С. 145–149.

9. Пиров Р. Автореф. дис... канд. физ.-мат. наук. – Душанбе, 1984. – 11 с.

10. Пиров Р. *Об условиях совместности и многообразиях решений некоторых классов переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка* // Уфимский матем. журнал. – 2016. – Т. 8, № 2. – С. 59-66.

THEORY OF SOME OVERDETERMINED SYSTEMS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FIRST AND SECOND ORDER

R. Pirov

Quasilinear and nonlinear systems of the first and second order partial differential equations with one and two unknown functions are considered. Explicit compatibility conditions are obtained ensuring unambiguous solvability of problems for the systems with initial data.

Keywords: overdetermined sistems, compaibility conditions, manifolds of solutions, cross diffrention.

УДК 517.977

ВЫЧИСЛЕНИЕ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ДЛЯ РАЗНОСТИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Е.С. Половинкин[1]

1 *polovinkin.es@mipt.ru*; Московский физико-технический институт

При исследовании негладких непрерывных функций $f : X \to \mathbb{R}^1$ на локальный минимум или максимум в некоторой точке $x_0 \in X$ необходимое условие экстремума принимает вид включения: $0 \in \partial_C f(x_0)$, где $\partial_C f(x_0)$ означает субдифференциал Кларка. В более сложных задачах математической теории управления также возникает необходимость вычисления субдифференциалов типа субдифференциала Кларка. Однако вычисление этих субдифференциалов для негладкой и невыпуклой функции само является не простой задачей. В данном докладе выявлен достаточно широкий класс негладких функций, которые мы назвали слабо регулярными функциями, для которого получены формулы вычисления различных производных по направлениям, а с ними и субдифференциалов, включая субдифференциалы Кларка, Мишеля-Пено и другие. В частности это позволяет вычислять субдифференциалы для функций, представимых в виде разности двух локально липшицевых выпуклых функций.

Ключевые слова: негладкий анализ, выпуклая функция, слабо регулярная функция, производная по направлениям, субдифференциал Кларка.

Пусть X — действительное банахово пространство. Через $B_r(x_0) \doteq \{x \in X \mid \|x - x_0\| < r\}$ обозначаем открытый шар с центром в точке x_0 радиуса $r > 0$ в пространстве X. Для всякой функции $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ определим множество $\operatorname{dom} f := \{x \in X \mid f(x) \neq \infty\}$.