Оператор свертки Данкла функционала $F(z) \in H^*(\mathbb{C})$ и функции $f(z) \in H(\mathbb{C})$ определяется по формуле

$$M_F[f(z)] = (F(t), S_t[f(z)]), \quad z, t \in \mathbb{C}.$$

## Литература

1. Напалков В. В., Напалков В. В. (мл.) *Операторы Данкла как операторы свертки* // Доклады Академии наук. –2008. – Т. 423. – № 3. – С. 300–302.

2. Карамов И. И., Напалков В. В. *Обобщенный оператор Данкла* // Уфимский математический журнал. – 2014. – Т. 6. – № 1. – С. 59–68.

GENERALIZED DUNKL CONVOLUTION OPERATOR

A.I. Rakhimova, V.V. Napalkov

*The paper considers the generalized Dunkl operator and its properties. We study the convolution operator constructed from it.*

Keywords: generalized Dunkl operator, Dunkl convolution operator, Dunkl transform, eigenfunction.

УДК 517.95

# НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНЫЕ И НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ

К.Б. Сабитов[1]

1 *sabitov_fmf@mail.ru*; Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований РБ, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета

*Для уравнения колебаний конечной балки изучены начально-граничные задачи и начальная задача для бесконечной балки. Решения задач построены в явном виде и доказаны соответствующие теоремы единственности и существования в классе регулярных решений.*

**Ключевые слова**: уравнение балки, начально-граничные задачи, начальная задача, спектральный метод, единственность, существование, ряд, устойчивость.

Многие задачи о колебаниях стержней, балок и пластин, которые имеют важное значение в строительной механике, теории устойчивости вращающихся валов и вибрации кораблей приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка.

Пусть балка длины $l$ для определенности опирается на две опоры с помощью штифтовых устройств. Под влиянием непрерывной внешней силы $g(x,t)$, рассчитанной на единицу длины, вынужденные изгибные поперечные колебания однородной балки, при отсутствии вращательного движения при изгибе, описываются уравнением четвертого порядка [1, с. 141 – 143], [2, с. 278 – 280]

$$\rho S u_{tt} + EJ u_{xxxx} = g(x,t),$$

где $\rho$ – линейная плотность балки, $S$ – площадь поперечного сечения, $E$ – модуль упругости материала, $J$ – момент инерции сечения относительно своей горизонтальной оси, которое перепишем в следующем виде:

$$Lu \equiv u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = f(x,t), \tag{1}$$

где $\alpha^2 = EJ/\rho S$, $f(x,t) = g(x,t)/\rho S$.

Отметим, что к уравнению (1) приходят во многих задачах при расчете устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей [3].

Для определения колебания (смещения) $u(x,t)$ точек балки нужно задать граничные условия на концах $x=0$ и $x=l$. Вид дополнительных граничных условий зависит от способа закрепления соответствующего конца. Если оба конца подперты, т.е. могут свободно вращаться вокруг точки закрепления, то в этом месте изгибающий момент должен равняться нулю. В этом случае мы имеем условия

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(l,t) = u_{xx}(l,t) = 0, \ \ 0 \le t \le T. \tag{2}$$

А в случае балки с наглухо закрепленными обоими концами граничными условиями являются неподвижность балки и горизонтальность касательной на концах:

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u(l,t) = u_x(l,t) = 0, \ \ 0 \le t \le T. \tag{3}$$

Если оба конца свободны, то в этом случае на концах должны равняться нулю изгибающий момент и тангенциальная сила

$$u_{xx}(0,t) = u_{xxx}(0,t) = u_{xx}(l,t) = u_{xxx}(l,t) = 0, \ \ 0 \le t \le T. \tag{4}$$

Если конец $x=0$ наглухо заделан, а другой конец $x=l$ свободен, то имеем следующие граничные условия:

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u_{xx}(l,t) = u_{xxx}(l,t) = 0, \ \ 0 \le t \le T. \tag{5}$$

Если конец $x=0$ шарнирно закреплен, а другой наглухо заделан, то

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(l,t) = u_x(l,t) = 0, \ \ 0 \le t \le T. \tag{6}$$

Возможны и другие граничные условия.

Что касается начальных условий, то они такие же, как и в случае уравнения струны:

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \ u_t(x,t)|_{t=0} = \psi(x), 0 \le x \le l. \tag{7}$$

В данной работе для уравнения (1) изучены следующие начально-граничные задачи в прямоугольной области

$$D = \{(x,t) \,|\, 0 < x < l, \ 0 < t < T\},$$

где $l$ и $T$ – заданные положительные числа.

**Начально-граничные задачи.** *Найти в области $D$ функцию $u(x,t)$ со следующими свойствами:*

$$u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(\overline{D}); \tag{8}$$

$$Lu(x,t) \equiv f(x,t), \ \ (x,t) \in D; \tag{9}$$

*удовлетворяет начальным условиям* (7) *и одному из граничных условий* (2) – (6)*, где* $f(x,t)$*,* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *– заданные достаточно гладкие функции.*

Отметим, что в работах [2, с. 277], [3], [4, гл. VI] [5, с. 45], [6, с. 35], [7, с. 151], [8, с. 25] методом разделения переменных найдены собственные частоты (собственные значения) и формы собственных колебаний (собственные функции) для уравнения (1) при $f(x,t)=0$ с граничными условиями (2) – (6). Вопросы об обосновании корректности поставленных нами начально-граничных задач не изучены. Интерес к этим задачам вызван обращением автору статьи специалистов по строительной механике с просьбой построить в явном виде решения поставленных задач.

Теория колебаний стержней и балок, даже упрощенная путем отбрасывания несущественных величин, более сложная, чем теория колебаний идеально гибких струн. Объяснение такой простоты колебаний струны следует из того факта, что волны гармонического типа распространяются со скоростью, не зависящей от длины волны, поэтому такая волна может распространяться без искажения и постоянную $a$ в уравнении струны

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0$$

называют скоростью распространения волны. Но когда мы рассматриваем колебания стержня или балки, то постоянная $\alpha$ в уравнении (1) уже не может быть истолкована как некоторая скорость вследствие зависимости скорости распространения от длины волны [2, с. 321].

В наших работах [9 – 12] следуя [13, с. 100–111] изучены начально-граничные задачи, решения которых построены в виде суммы рядов и доказаны соответствующие теоремы единственности, существования и устойчивости решения.

В данном докладе также рассмотрим задачу колебаний бесконечной балки в любой момент времени $t>0$ после начального возмущения, решение которой формально приведено в работе [2, с. 322 – 324] без соответствующих обоснований. Для этого уравнение (1) зададим в полуплоскости

$$Q=\{(x,t)|\, t>0,\ x\in\mathbb{R}\}.$$

**Начальная задача.** *Найти функцию* $u(x,t)$*, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,t)\in C^{4,2}_{x,t}(Q)\cap C^1_t(Q\cup\{t=0\})\cap C(\overline{Q}); \tag{10}$$

$$Lu(x,t)\equiv 0,\ \ (x,t)\in Q; \tag{11}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ u_t(x,0)=\psi(x),\ \ x\in\mathbb{R}, \tag{12}$$

*где* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *– заданные достаточно гладкие функции.*

Здесь решение задачи (10) – (12) построено в явном виде и доказано его существование.

## Литература

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики* (изд. 3). – М.: Наука, 1966. – 724 с.

2. Рэлей Л. *Теория звука*. Т. 1, (изд. 2). – М.: Гостехиздат, 1955. – 503 с.

3. Крылов А. Н. *Вибрация судов*, (изд. 2). – М., 2012. – 447 с.

4. Гулд С. *Вариационные методы в задачах о собственных значениях: Введение в метод промежуточных задач Вайнштейна*. – М.: Мир, 1970. – 328 с.

5. Коренев Б. Г. *Вопросы расчета балок и плит на упругом основании*. – М.: Стройиздат, 1965. – 232 с.

6. Коллатц Л. *Задачи на собственные значения с техническими приложениями*. – М.: Наука, 1968. – 503 с.

7. Бидерман В. Л. *Теория механических колебаний*. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.

8. Андрианов И. В., Данишевский В. В., Иванков А. О. *Асимптотические методы в теории колебаний балок и пластин*. – Днепропетровск: Приднепровская гос. академия стр. и арх., 2010. – 216 с.

9. Сабитов К. Б. *Начальная задача для уравнения колебаний балки*. – 2017. – Т. 53. – № 5. – С. 665–671.

10. Сабитов К. Б. *Уравнения математической физики*. – М.: Физматлит, 2013. – 352 с.

11. Сабитов К. Б. *Начально-граничная задача для уравнения колебаний балки* // В сб.: Матем. методы и модели в стр., арх. и дизайне. Самарский гос. арх.-стр. унив. – Самара, 2015. – С. 34–42.

12. Сабитов К. Б. *Колебания балки с заделанными концами* // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Серия: Физ.-мат. науки. – 2015. – Т. 19, № 2 (39). – С. 311–324.

13. Сабитов К. Б. *К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок* // Дифф. уравнения. – 2017. – Т. 53. – № 1. – С. 89–100.

## INITIAL-BOUNDARY AND INITIAL PROBLEMS FOR THE EQUATION OF OSCILLATIONS OF A BEAM

K.B. Sabitov

*For the equation of oscillations of a finite beam, the initial-boundary problems and the initial problem for an infinite beam are studied. The solutions of the problems are constructed in an explicit form, and the corresponding uniqueness and existence theorems in the class of regular solutions are proved.*

Keywords: beam equation, initial-boundary value problems, initial problem, spectral method, uniqueness, existence, series, stability.

УДК 517.95

# ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ

Ю.К. Сабитова[1]

1 *sabitovauk@rambler.ru*; Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета

*В статье построено решение первой граничной задачи для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области и доказана ее единственность. Решение получено в виде суммы ряда по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи.*

**Ключевые слова**: нагруженное уравнение, задача Дирихле, критерий единственности.