

## Литература

1. Lusternik L. A. *Die Brunn-Minkowskische Ungleichung für beliebige messbare Mengen* // C. R. Acad. Sci. URSS. – 1935. – V. 8. – P. 55-58.
2. Hadwiger H., Ohmann D. *Brunn-Minkowskischer Satz und Isoperimetrie* // Math. Z. – 1956. – V. 66. – P. 1-8.
3. Gardner R. J. *The Brunn-Minkowski inequality* // Bull. Amer. Math. Soc. – 2002. – V. 39. – P. 355-405.
4. Barthe F. *The Brunn-Minkowski theorem and related geometric and functional inequalities* // Int. Congress of Math. – 2006 – V. 2. – P. 1529-1546.
5. Keady G. *On a Brunn-Minkowski theorem for a geometric domain functional considered by Avhadiev* // J. Inequal. Pure Appl. Math. – 2007. – V. 8. – P. 1-10.
6. Авхадиев Ф. Г. *Решение обобщенной задачи Сен-Венана* // Матем. сб. – 1998. – № 12. – С. 3-12.
7. Авхадиев Ф. Г., Тимергалиев Б. С. *Неравенства типа Брунна-Минковского для конформных и евклидовых моментов областей* // Изв. вуз. Матем. – 2014. – № 5. – С. 64-67.
8. Тимергалиев Б. С. *Неравенства типа Брунна-Минковского в форме Хадвигера для степенных моментов* // Уч. зап. Каз. ун-та. – 2016. – № 1. – С. 90-106.
9. Тимергалиев Б. С. *Неравенства типа Брунна-Минковского в форме Хадвигера для обобщенных степенных моментов* // Вестник ВолГУ. – 2016. – № 4. – С. 92-107.
10. Timergaliev B. S. *Generalization of the Brunn-Minkowski inequality in the form of Hadwiger for power moments* // Lobachevskii J. Math. – 2016 – V. 37. – № 6. – P. 794-806.
11. Hadwiger H. *Konkave eikerperfunktionale und hoher tragheitsmomente* // Comment Math. Helv. – 1956. – V. 30. – P. 285-296.

### BRUNN-MINKOWSKI TYPE INEQUALITY FOR GENERALIZED POWER MOMENTS WITH ADDITIONAL MULTIPLIERS

B.S. Timergaliev

*In this paper we built classes of domain functionals in euclidian space and proved a Brunn-Minkowski type inequality applied to the mentioned classes.*

Keywords: Brunn-Minkowski inequality, concave function, power moments.

УДК 517.518.85, 517.518.68

### О ПРИНЦИПЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЛЯ СИНК-АППРОКСИМАЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ

А.Ю. Трынин<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [tayu@rambler.ru](mailto:tayu@rambler.ru); Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

*В статье обсуждается справедливость принципа локализации синк-аппроксимаций на отрезке на классе функций, интегрируемых по Риману.*

**Ключевые слова:** синк-аппроксимации, кардинальные функции, приближение, принцип локализации.

Работа посвящена изучению аппроксимативных свойств синк-приближений

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^n l_{k,n}(x) f\left(\frac{k\pi}{n}\right). \quad (1)$$

внутри интервала  $(0, \pi)$ .

Интересные признаки равномерной сходимости на оси кардинальных функций Уиттекера приводятся в [1], [2]. Не менее важны достаточные условия сходимости синк-аппроксимаций получены авторами статей [3], [4].

К сожалению, при приближении непрерывных функций на отрезке с помощью (1) и многих других операторов вблизи концов отрезка возникает явление Гиббса (см., например, [5]).

В [6], [7], [11] и [5] получены различные оценки погрешности аппроксимации аналитических в круге функций с помощью синк-приближений (1). Насколько мне известно, до появления этих работ приближение кардинальными функциями Уиттекера на отрезке или ограниченном интервале осуществлялось только для некоторых классов аналитических функций сведением к случаю оси с помощью конформного отображения.

В статье [11] установлены точные по порядку оценки для функций и констант Лебега оператора (1), а также получен пригодный для изучения аппроксимативных свойств оператора (1) аналог формулы Г.П. Неваи. Работы [8], [12] посвящены получению необходимых и достаточных условий поточечной и равномерной внутри интервала  $(0, \pi)$  сходимости синк-аппроксимаций (1) для непрерывных на  $[0, \pi]$  функций. Авторы интересной статьи [13] используют результаты работы [8] для исследования сходимости алгоритмов многоуровневых синк-аппроксимаций функций с минимальной гладкостью.

В [14] построен пример непрерывной, исчезающей на концах отрезка  $[0, \pi]$  функции, для которой последовательность значений операторов (1) неограниченно расходится всюду на интервале  $(0, \pi)$ . Из результатов исследований в [14] видно, что при попытке приближения негладких непрерывных функций значениями операторов (1) возможно появление „резонанса“, приводящего к неограниченному росту погрешности аппроксимации на всём интервале  $(0, \pi)$ .

Будем говорить, что для интерполяционного процесса синк-аппроксимаций (1) в окрестности  $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$  имеет место принцип  $\delta$ -локализации на классе функций  $\mathbb{F}(x_0, \delta_1, \delta_2)$  в точке  $x_0 \in [0, \pi]$ , если для любых функций  $f \in \mathbb{F}(x_0, \delta_1, \delta_2)$ ,  $g \in \mathbb{F}(x_0, \delta_1, \delta_2)$ , совпадающих в  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$ :  $O_\delta(x_0) = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2) \cap [0, \pi]$ , имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f, x_0) - L_n(g, x_0) = 0. \quad (2)$$

**Определение.** Будем говорить, что для интерполяционного процесса синк-аппроксимаций (1) имеет место принцип локализации на классе функций  $\mathbb{F}$ , если  $\mathbb{F} \subset$

$$\bigcap_{\substack{x_0 \in [0, \pi]; \\ \delta_1 > 0, \delta_2 > 0}} \mathbb{F}(x_0, \delta_1, \delta_2).$$

В настоящей работе, с использованием концепции публикаций [15] – [22] показано, что для множества интегрируемых по Риману функций имеет место принцип локализации для интерполяционного процесса синк-аппроксимаций (1).

Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 1.** Пусть  $f$  интегрируема в смысле Римана на отрезке  $[0, \pi]$ ,  $x_0 \in [0, \pi]$  и  $O_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [0, \pi]$ . Для того чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: x_{k,n} \in [0, \pi] \setminus O_\delta(x_0)} F_n(x_{k,n}) f(x_{k,n}) = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность конечнозначных функций, заданных на  $0 \leq x_{1,n} < \dots < x_{n,n} \leq \pi$ , удовлетворяла условиям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: x_{k,n} \in [a, b] \subset [0, \pi] \setminus O_\delta(x_0)} F_n(x_{k,n}) = 0,$$

$$\max_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k: x_{k,n} \in [0, \pi] \setminus O_\delta(x_0)} |F_n(x_{k,n})| \leq M < \infty,$$

для любой последовательности множеств  $I_l = \bigcup_{1 \leq j \leq m_l} [a_j, b_j]$ ,  $m_l < \infty$ ,  $[a_j, b_j] \subset [0, \pi]$ ,  $\subset [0, \pi] \setminus O_\delta(x_0) \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_l \supset \dots$ ,  $\text{mes } I_l \rightarrow 0$  при  $l \rightarrow \infty$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: x_{k,n} \in I_k} |F_n(x_{k,n})| = 0.$$

Справедлива следующая

**Теорема 1.** Для интерполяционного процесса синк аппроксимаций (1) имеет место принцип локализации на классе функций интегрируемых по Риману на отрезке  $[0, \pi]$ .

**Доказательство.** Убеждаемся, что для синк-функций  $l_{k,n}(x)$  из (1) справедливы соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: x_{k,n} \in [a, b] \subset [0, \pi] \setminus O_\delta(x_0)} l_{k,n}(x_0) = 0,$$

$$\max_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k: x_{k,n} \in [0, \pi] \setminus O_\delta(x_0)} |l_{k,n}(x_0)| \leq M < \infty,$$

для любой последовательности множеств  $I_l = \bigcup_{1 \leq j \leq m_l} [a_j, b_j]$ ,  $m_l < \infty$ ,  $[a_j, b_j] \subset [0, \pi]$ ,  $\subset [0, \pi] \setminus O_\delta(x_0) \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_l \supset \dots$ ,  $\text{mes } I_l \rightarrow 0$  при  $l \rightarrow \infty$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: x_{k,n} \in I_k} |l_{k,n}(x_0)| = 0.$$

Отсюда и леммы 1 следует утверждение теоремы 1.

### Литература

1. Brown J.L.Jr. On the error in reconstructing a nonbandlimited function by means of bandpass sampling theorem // J. of Mathematical Analysis and Applications. – 1967. – № 18. – P. 75–84.
2. Butzer P.L., Higgins J.R., Stens R.L. Classical and approximate sampling theorems: studies in the  $L^p(\mathbb{R})$  and the uniform norm // Journal of Approximation Theory. – 2005. – V. 137. – № 2. – P. 250–263.
3. Шмуклер А.И., Шульман Т.А. О некоторых свойствах рядов Котельникова // Известия вузов. Математика. – 1974. – № 3. – С. 93–103.

4. Умаханов А.Я., Шарапудинов И.И. *Интерполяция функций суммами Уиттекера и их модификация-ми: условия равномерной сходимости* // Владикавказ. матем. журн. – 2016. – Т. 18. – № 4. – С. 61–70.
5. Trynin A.Yu., Sklyarov V.P. *Error of sinc approximation of analytic functions on an interval* // Sampling Theory in Signal and Image Processing. – 2008. – V. 7. – № 3. – P. 263–270.
6. Трынин А.Ю. *Об аппроксимации аналитических функций операторами Лагранжа-Штурма-Ливуилля* // Тезисы докладов 10 Саратовской зимней школы „Современные проблемы теории функций и их приложения“. 27 января - 2 февраля 2000 года. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2000. – С. 140–141.
7. Трынин А.Ю. *Об оценке аппроксимации аналитических функций интерполяционным оператором по синкам* // Математика. Механика. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. – Т. 7. – С. 124–127
8. Трынин А.Ю. *Критерии поточечной и равномерной сходимости синк-приближений непрерывных функций на отрезке* // Математический сборник. – 2007. – Т. 198. – № 10. – С. 141–158.
9. Трынин А.Ю. *Обобщение теоремы отсчётов Уиттекера-Котельникова-Шеннона для непрерывных функций на отрезке* // Математический сборник. – 2009. – Т. 200. – № 11. – С. 61–108.
10. Трынин А.Ю. *Об операторах интерполирования по решениям задачи Коши и многочленах Лагранжа-Якоби* // Известия Российской Академии Наук. Серия математическая. – 2011. – Т. 75. – № 6. – С. 129–162.
11. Трынин А.Ю. *Оценки функций Лебега и формула Неваи для sinc-приближений непрерывных функций на отрезке* // Сибирский математический журнал. – 2007. – Т. 48. – № 5. – С. 1155–1166.
12. Трынин А.Ю. *Критерий равномерной сходимости sinc-приближений на отрезке* // Изв. высш. уч-ых заведений. Математика. – 2008. – № 6. – С. 66–78.
13. Livne Oren E., Brandt Achi E. *MuST: The multilevel sinc transform* // SIAM J. on Scientific Computing. – 2011. – V. 33. – № 4. – P. 1726–1738.
14. Трынин А.Ю. *О расходимости синк-приближений всюду на  $(0, \pi)$*  // Алгебра и анализ. – 2010. – Т. 22. – № 4. – С. 232–256.
15. Голубов Б.И. *Сферический скачок функции и средние Бохнера-Рисса сопряженных кратных рядов и интегралов Фурье* // Матем. заметки. – 2012. – Т. 91. – № 4. – С. 506–514.
16. Голубов Б.И. *Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье* // Матем. заметки. – 1985. – Т. 37. – № 1. – С. 13–24.
17. Дьяченко М.И. *Об одном классе методов суммирования кратных рядов Фурье* // Математический сборник. – 2013. – Т. 204. – № 3. – С. 3–18.
18. Дьяченко М.И. *Равномерная сходимость гиперболических частичных сумм кратных рядов Фурье* // Матем. заметки. – 2004. – Т. 76. – № 5. – С. 723–731.
19. Новиков И. Я., Скопина М. А. *Почему в разных структурах базисы Хаара одинаковые?* // Матем. заметки. – 2012. – Т. 91. – Вып. 6. – С. 950–953.
20. Половинкин Е.С. *Об интегрировании многозначных отображений* // ДАН. – 1983. – Т. 281. – № 5. – С. 1069–1074.
21. Половинкин Е.С. *О некоторых свойствах производных многозначных отображений* // Труды МФТИ. – 2012. – Т. 4. – № 4. – С. 141–154.
22. Родионов Е.А., Фарков Ю.А. *Оценки гладкости диадических ортогональных всплесков типа Добе-ши* // Матем. заметки. – 2009. – Т. 86. – № 5. – С. 429–444.

## ON THE PRINCIPLE OF LOCALIZATION FOR SINC APPROXIMATIONS ON AN INTERVAL

A.Yu. Trynin

*The validity of the principle of the localization of sinc-approximations on an interval on the class of functions that are Riemann integrable.*

Keywords: Sinc approximations, cardinal functions, approximation, localization principle.

УДК 517.51

## ОЦЕНКА ОДНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТИ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕЙ УСЛОВИЮ ВНУТРЕННЕГО КОНУСА

И.В. Трухляева<sup>1</sup>

<sup>1</sup> irishka2027@mail.ru; Волгоградский государственный университет

*Настоящая работа посвящена оценке величины, необходимой для выяснения равномерной сходимости приближенных решений уравнения минимальной поверхности.*

**Ключевые слова:** уравнение минимальной поверхности, равномерная сходимость, приближенное решение, аппроксимация уравнения, оценка равномерной сходимости.

Рассмотрим следующую полиномиальную характеристику области  $\Omega \subset R^n$

$$\lambda_N = \inf_P \frac{\left( \int_{\Omega} |\nabla P|^2 dx \right)^{1/2}}{\sqrt{|\Omega|} \sup_{\Omega} |\nabla P|},$$

где точная нижняя грань берется по всем многочленам степени не более чем  $N$  по каждой переменной. Приведем пример оценки снизу величины  $\lambda_N$ . Отметим, что данная характеристика области применяется при оценке скорости сходимости полиномиальных решений уравнения минимальных поверхностей (см. [1]).

В работе [2] для куба было получено следующее неравенство

$$\lambda_N \geq \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\sqrt{\omega_n}}{2^{n/2} N^n \sqrt[n]{n^n}}, \quad (1)$$

которое позволило напрямую сделать оценку величины  $\lambda_N$  для областей  $\Omega$ , для которых  $\Delta(\Omega) > 0$ , где

$$\Delta(\Omega) = \inf_{z_0 \in \Omega} a(z_0)$$

и  $a(z_0)$  определяется следующим образом: для любого  $z_0 \in \Omega$  находим максимальный куб  $K(z_0) \subset \Omega$ , не обязательно со сторонами, параллельными осям координат, такой что  $z_0 \in K(z_0)$ . Пусть  $a(z_0)$  – сторона этого куба.

Очевидно, что имеются области с кусочно-гладкой границей, для которых  $\Delta(\Omega) = 0$ . Например, для конуса  $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1, 0 < z < A(1 - \sqrt{x^2 + y^2})\}$  при достаточно больших  $A > 0$  величина  $\Delta(C) = 0$ .