

для всех критических точек f . Дубинин и Сугава [4] доказали, что существует такая критическая точка ζ , для которой

$$\left| \frac{f(\zeta)}{\zeta} \right| \geq \frac{1}{n4^n}.$$

Гипотеза легко проверяется для малых значений n , однако, уже начиная с $n = 4$ проверка представляет из себя сложную задачу, требующую длительных рассуждений.

Доказательство для $n = 4$ было представлено Тишлером в [3].

Основным результатом данной работы является доказательство дуальной гипотезы Смейла для случаев $n = 5$ и $n = 6$.

Исследования первого автора были проведены при поддержке РФФИ (проект 17-01-00282).

Литература

1. Smale S. *The fundamental theorem of algebra and complexity theory* // Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) – 1981. – № 4. – П. 1–36.
2. Beardon A.F., Minda D., Ng T.W. *Smale's mean value conjecture and the hyperbolic metric* // Math. Ann. – 2002. – V. 322, № 4. – П. 623–632.
3. Tischler D. *Critical points and values of complex polynomials* // J. Complexity. – 1989. – № 5. – П. 438–456.
4. Dubinin V., Sugawa T. *Dual mean value problem for complex polynomials* // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. – 2009. – V. 85, № 9. – П. 135–137.

ABOUT CRITICAL VALUES OF POLYNOMIALS

I.R. Kayumov, D.M. Khammatova, A. Hinkkanen

We prove dual Smale's mean value conjecture in the cases $n = 5$ and $n = 6$.

Keywords: dual Smale's mean value conjecture, critical points, critical values of polynomials.

УДК 512.583, 539.142

ПРОСТАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ МАЛОНУКЛОННЫХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ НЕАБЕЛЕВЫХ ПРАВИЛ СУПЕРОТБОРА

М.И. Кириллов¹, А.С. Никитин², А.С. Ситдииков³

¹ kirillov_math@mail.ru; Казанский государственный энергетический университет

² drnikitin@rambler.ru; Казанский государственный энергетический университет

³ airat_vm@rambler.ru; Казанский государственный энергетический университет

Дана формулировка простой алгебраической модели с правилами суперотбора по изоспину. Модель апробирована на двухнуклонной системе и показано, что физически реализуемые состояния, соответствующие связанным состояниям двух нуклонов, можно получить с помощью специального изометрического оператора.

Ключевые слова: алгебра Кунца, тензорная моноидальная C^* -категория, дибарионная система, изоспин, правила суперотбора.

В данной работе мы предлагаем простую алгебраическую модель для описания малонуклонных систем в изотопическом пространстве. В основе модели лежит категория тензорных степеней гильбертова пространства, базисом которого служат изометрии ψ_i ($i = 1, 2$), удовлетворяющие условиям (1) и (2) и которые порождают алгебру Кунца \mathcal{O}_2 [1]. В этих гильбертовых пространствах реализуются представления тензорных степеней группы $SU(2)$, которые индексируются с помощью квантовых чисел изоспина $\{0; 1/2; 1; 3/2; \dots\}$ и правило произведения объектов категории позволяет описать сложение изоспинов и получить соответствующие суперотборные сектора. Эту модель мы применяем для описания двухнуклонной системы и показываем, что изометрические сплетающие операторы (элементы алгебры Кунца), которые поточечно не инвариантны относительно действия группы G , позволяют получать из вакуумного сектора изотопические заряды секторов.

Центральным элементом в такой модельной конструкции является построение C^* -алгебры скрещенного произведения $\mathcal{A} \bowtie \mathcal{T}$ [2]. Эта алгебра содержит \mathcal{A} в качестве подалгебры, остающейся поточечно фиксированной относительно действия компактной группы G , причем G является группой автоморфизмов скрещенного произведения. Другими словами, группа G оказывается замкнутой подгруппой группы $aut \mathcal{A} \bowtie \mathcal{T}$ согласно Галуа-соответствию [3]. В случае алгебры \mathcal{A} с тривиальным центром CI рассмотрение скрещенного произведения категории \mathcal{T} с объектами вида $obj \mathcal{T} = \{\iota, \rho, \rho \otimes \rho, \rho \otimes \rho \otimes \rho, \dots\}$ (где ι – тождественный эндоморфизм), приводит к алгебре Кунца \mathcal{O}_d , где d – размерность ρ . Действие G при этом оказывается каноническим, а эндоморфизм ρ алгебры \mathcal{A} порождается фундаментальным мультиплетом (1), (2). Поэтому C^* -динамическую систему (\mathcal{A}, ρ) можно отождествить с C^* -динамической системой $(\mathcal{O}_G, \sigma_G)$, где \mathcal{O}_G – поточечно фиксированная подалгебра алгебры \mathcal{O}_d относительно действия G .

Построим теперь моноидальную категорию $\mathbf{rep}(G)$ тензорных степеней неприводимого представления $\pi^{1/2}$ компактной группы $SU(2)$, объекты которой суть

$$Obj \mathbf{rep}(G) = \{\iota, \pi^{1/2}, (\pi^{1/2})^{\otimes 2}, (\pi^{1/2})^{\otimes 3}, \dots, (\pi^{1/2})^{\otimes r}, \dots, (\pi^{1/2})^{\otimes s}, \dots\},$$

где $\pi^{1/2} \otimes \pi^{1/2} \equiv (\pi^{1/2})^{\otimes 2}, \dots; r, s \in \mathbb{N}_0$. Морфизмы в этой категории – сплетающие операторы таких представлений. В физическом плане бинарная операция тензорного произведения " \otimes " в категории соответствует векторному сложению изоспинов.

В качестве ортонормированного базиса гильбертова пространства \mathcal{H}_{TT_z} , где действуют неприводимые представления $\pi^{1/2}$, выберем мультиплет ψ_i ($i = 1, 2$), удовлетворяющий соотношениям

$$\psi_i^* \psi_j = \delta_{ij} I \tag{1}$$

$$\sum_i \psi_i \psi_i^* = I. \tag{2}$$

При этом элементы ψ_i ($i = 1, 2$), удовлетворяющие соотношениям (1) и (2), порождают $*$ -алгебру ${}^0\mathcal{O}_2$, пополнение которой по C^* норме образует алгебру Кунца \mathcal{O}_2 . Линейная оболочка $Lin\{\psi_i\}_{i=1}^{d=2}$ данного мультиплета образует d -мерное (в данном случае двумерное) гильбертово пространство \mathcal{H}_{TT_z} со скалярным произведением, представляемым как $(\psi, \psi') I = \psi^* \psi'$, где $\psi, \psi' \in \mathcal{H}_{TT_z}$. Такое гильбертово пространство назовем каноническим. Его тензорные степени $\mathcal{H}_{TT_z}^r$ ($r = 0, 1, 2, \dots$) образуют

подкатегорию **hilib**, где морфизмы – сплетающие операторы. Объекты **hilib** образуют G -модули, в которых действуют непрерывные унитарные представления (т.е. $Obj\mathbf{rep}(G)$) группы G . Морфизмами в этом случае являются G -модульные гомоморфизмы $(\mathcal{H}_{TT_z}^r, \mathcal{H}_{TT_z}^s)_G$. Эта конструкция позволяет нам определить подалгебру ${}^0\mathcal{O}_G \subset {}^0\mathcal{O}_d$ алгебры Кунца ${}^0\mathcal{O}_d$ – алгебру наблюдаемых – следующим образом. Поскольку индуктивный предел последовательности

$$(\mathcal{H}_{TT_z}^r, \mathcal{H}_{TT_z}^{r+k})_G \longrightarrow {}^{\otimes 1}(\mathcal{H}_{TT_z}^{r+1}, \mathcal{H}_{TT_z}^{r+1+k})_G \longrightarrow {}^{\otimes 1} \dots \longrightarrow {}^{\otimes 1}(\mathcal{H}_{TT_z}^{r+n}, \mathcal{H}_{TT_z}^{r+n+k})_G \longrightarrow {}^{\otimes 1} \dots,$$

где $(\mathcal{H}_{TT_z}^r, \mathcal{H}_{TT_z}^{r+k})_G \longrightarrow {}^{\otimes 1}(\mathcal{H}_{TT_z}^{r+1}, \mathcal{H}_{TT_z}^{r+1+k})_G$ – инъективное отображение морфизмов, определяет при фиксированном k некоторое банахово пространство ${}^0\mathcal{O}_G^k$, то суммируя по всем k получаем \mathbf{Z} – градуированную C^* -алгебру ${}^0\mathcal{O}_G = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} {}^0\mathcal{O}_G^k$, в которой действует эндоморфизм σ_G [4] (см. также [2]). Замыкание этой алгебры ${}^0\mathcal{O}_G$ приводит к подалгебре \mathcal{O}_G алгебры Кунца, играющей роль алгебры наблюдаемых.

Действие элемента

$$\left[\pi^l(g) \right] (\psi_1, \psi_2) = f(\alpha\psi_1 + \gamma\psi_2, \beta\psi_1 + \delta\psi_2), g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in G = SU(2)$$

на эти базисные вектора ψ_1 и ψ_2 при $l = 1/2$ определено стандартным образом:

$$\pi^{1/2}\psi_1 = \alpha\psi_1 + \gamma\psi_2, \quad \pi^{1/2}\psi_2 = \beta\psi_1 + \delta\psi_2,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – матричные элементы фундаментального представления группы $SU(2)$. Образы из базисных элементов ψ_1 и ψ_2 антисимметричный тензор

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1\psi_2 - \psi_2\psi_1) \quad (3)$$

и симметричные тензоры

$$e_2 = \psi_1^2, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1\psi_2 + \psi_2\psi_1), \quad e_4 = \psi_2^2, \quad (4)$$

дающие ортонормированный базис в тензорном квадрате $\mathcal{H}_{TT_z}^2$ размерности 4, порожденный линейной оболочкой $Lin\{\psi_i\psi_j\}_{i,j=1}^{d=2}$, получим матрицу представления, которая представляет собой прямую сумму тривиального ($l = 0$) и трехмерного векторного ($l = 1$) представлений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 0 & 2\alpha\gamma & \alpha\delta + \beta\gamma & 2\delta\beta \\ 0 & \gamma^2 & \gamma\delta & \delta^2 \end{pmatrix} = 1 \oplus \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha\gamma & \alpha\delta + \beta\gamma & 2\delta\beta \\ \gamma^2 & \gamma\delta & \delta^2 \end{pmatrix}.$$

При этом (3), (4) соответствуют равновероятным состояниям двух нуклонов, не поляризованных по изоспину, т.е. отвечают за состояния pp , nn , pn и np , где p – состояние протона, n – нейтрона.

Используя (3), (4), введем операторы проектирования для двухнуклонных состояний: SS^* на антисимметрическое, и KK^*, LL^*, MM^* на симметрическое подпространства, где $S = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1\psi_2 - \psi_2\psi_1)$, $K = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1\psi_2 + \psi_2\psi_1)$, $L = \psi_1^2$, $M = \psi_2^2$.

Нетрудно увидеть, что проектор SS^* оставляет неизменной нейтрон-протонное антисимметричное состояние, обращая в нуль все остальные, проектор LL^* оставляет неизменной двухнейтронное состояние, обращая в нуль все остальные, проектор KK^* не меняет симметричное нейтрон-протонное состояние, обращая в нуль все остальные и наконец, проектор MM^* оставляет двухпротонное состояние, обращая в нуль все остальные. Оператор MM^* может быть рассмотрен и как оператор двух обычных электрических зарядов. Сами изометрические операторы S, K, L, M осуществляют связь между вакуумным гильбертовым пространством $\mathcal{H}^0 \equiv \mathbb{C}$ и двухнуклонным пространством состояний \mathcal{H}^2 , причем не инвариантные относительно действия группы $SU(2)$ операторы K, L, M порождают из вакуума изотопический заряд $T = 1$ и поэтому имеют смысл полевых операторов, а G -инвариантный оператор

$$S = \frac{1}{\sqrt{2!}} \sum_{p \in \mathbf{P}_2} \text{sign}(p) \psi_{p(1)} \psi_{p(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 \psi_2 - \psi_2 \psi_1),$$

при $d = 2$ отвечает за нулевое значение изотопического заряда и соответствует наблюдаемому дейтрону.

Переход же под действием полевого оператора из состояния с $T = 0$ в состояние с $T = 1$ соответствует переходу к симметрическим подпространствам (4), что приводит уже к нестабильным двухнуклонным состояниям.

В данной работе рассмотрена двухнуклонная система в рамках предложенной простой алгебраической модели и показано, что физически реализуемое состояние соответствует сектору с минимальным (в данном случае нулевым) значением изоспина. Такое состояние двух нуклонов строится с помощью изометрического G -инвариантного оператора S , сплетающего пространство вакуумного состояния $\mathcal{H}_{TT_z}^0$ с пространством двухнуклонных состояний $\mathcal{H}_{TT_z}^2$, где реализуются стабильные связанные состояния двух нуклонов. Проектор, построенный с помощью S , является проектирующим оператором на антисимметричное подпространство (называемое специальным объектом) связанных двухнуклонных состояний.

Также построены изометрические полевые операторы, являющиеся переносчиками изотопического заряда, которые сплетают вакуумный сектор с сектором $T = 1$. Соответствующие проекторы, составленные из этих изометрических операторов, являются проектирующими операторами на симметрические подпространства $\mathcal{H}_{TT_z}^2$ и приводят к несвязанным двухнуклонным состояниям.

Литература

1. Doplicher S., Roberts J.E. *Why there is field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics* // Comm. Math. Phys. – 1990. – V. 131. – P. 51–107.
2. Doplicher S., Roberts J.E. *Endomorphisms of C^* -algebras, cross products and duality for compact groups* // Annals of Mathematics. – 1989. – V. 130. – P. 75–119.
3. Doplicher S., Roberts J.E. *Compact group actions on C^* -algebras* // Journal of Operator Theory. – 1988. – V. 19. – P. 283–305.
4. Doplicher S., Roberts J.E. *Duals of compact Lie groups realized in the Cuntz algebras and their actions on C^* -algebras* // Journal of functional analysis. – 1987. – V. 74. – P. 96–120.

A SIMPLE ALGEBRAIC MODEL FOR FEW-NUCLEON SYSTEMS
IN THE PRESENCE OF NON-ABELIAN SUPERSELECTION RULES

M.I. Kirillov, A.S. Nikitin, A.S. Sitdikov

Formulation of a simple algebraic model with isospin superselection rules is given. The model is approved on a two-nucleon system and it is shown that physically realizable states, corresponding to the bound states of two nucleons, can be obtained with a special isometric operator.

Keywords: Cuntz algebra, tensor monoidal C^* -category, dibaryon system, isospin, superselection rules.

УДК 517.95

**О СХОДИМОСТИ КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ
МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

А.А. Клячин¹, А.Г. Панченко²

¹ klyachin-aa@yandex.ru; Волгоградский государственный университет

² alice1051@ya.ru; Волгоградский государственный университет

В статье рассматривается понятие кусочно-квадратичного приближенного решения уравнения минимальной поверхности, заданного над триангулированной областью. Изучается вопрос об аппроксимации функционала площади в данном классе поверхностей и сходимость таких решений при стремлении к нулю мелкости треугольной сетки. В частности, доказана равномерная сходимость кусочно-квадратичных решений и указана оценка скорости этой сходимости через шаг сетки h .

Ключевые слова: кусочно-квадратичная функция, площадь поверхности, аппроксимация функционала, триангуляция, минимальная поверхность.

Пусть задана многоугольная ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Рассмотрим некоторое разбиение этого многоугольника на невырожденные треугольники T_1, T_2, \dots, T_N . Пусть M_1, M_2, \dots, M_m – все вершины этих треугольников. Будем предполагать, что ни одна из точек M_i не является внутренней точкой ни одной из сторон треугольников. Для построения кусочно-квадратичной функции добавим в имеющийся набор вершин M_1, M_2, \dots, M_m все середины сторон треугольников T_1, T_2, \dots, T_N . Полученное множество точек обозначим через $M_1, M_2, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_r$. Для произвольного набора чисел $u_1, u_2, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_r$ определим кусочно-квадратичную функцию $u: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ так, что $u(M_i) = u_i, i = 1, 2, \dots, r$ и функция $u(x, y) = a_{11}^k x^2 + a_{12}^k xy + a_{22}^k y^2 + a_{10}^k x + a_{01}^k y + a_{00}^k$ на каждом треугольнике $T_k, k = 1, \dots, N$. Данная функция будет непрерывной в Ω , и в каждом треугольнике T_k определен ее градиент ∇u . Поэтому площадь графика функции u вычисляется суммой

$$S(u) = \sum_{k=1}^N \iint_{T_k} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx dy.$$

Обозначим через Q_0^r подпространство пространства \mathbf{R}^r таких векторов $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)$, для которых $u_i = 0$, если $M_i \in \partial\Omega$. Отметим, что в этом случае соот-