

6. Jiang H, Li D, Jin N. *Multiresolution analysis on local fields* // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – V. 294. – P. 523–532.

## WAVELETS ON VILENKIN GROUPS

G.S. Berdnikov

*Wavelet construction on Vilenkin groups is discussed in the paper. The work is a logical conclusion of author's research in finding an algorithm for constructing a scaling function which generates orthogonal multiresolution analysis on Vilenkin groups. The algorithm doesn't require exhaustive search.*

Keywords: wavelets, Vilenkin groups, multiresolution analysis, graphs, scaling function, algorithm.

УДК 517.98

## ПАРАНОРМАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В НОРМИРОВАННОЙ АЛГЕБРЕ

А.М. Бикчентаев<sup>1</sup>, С.А. Абед<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *airat.bikchentaev@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>2</sup> *samialbarkish@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Для нормированной алгебры  $\mathcal{A}$  и  $k \in \mathbb{N}$  введены и исследованы  $\|\cdot\|$ -замкнутые классы

$$\mathcal{P}_k(\mathcal{A}) = \{T \in \mathcal{A} : \|T^{k+1}A\| \geq \|TA\|^{k+1} \text{ для всех } A \in \mathcal{A} \text{ с } \|A\| = 1\}.$$

Показано, что  $\mathcal{P}_1(\mathcal{A}) \subset \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$  для всех  $k \in \mathbb{N}$ . Если  $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ , то  $T^n \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Если  $\mathcal{A}$  унитарна,  $U, V \in \mathcal{A}$  такие, что  $\|U\| = \|V\| = 1$ ,  $VU = I$  и  $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ , то  $UTV \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$  для всех  $k \in \mathbb{N}$ . В частности, если  $\mathcal{A}$  унитарная  $C^*$ -алгебра и  $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ , то  $UTU^* \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$  для всех изометрий  $U \in \mathcal{A}$  и  $k \in \mathbb{N}$ . Пусть  $\mathcal{A}$  унитарна, тогда 1) если элемент  $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$  обратим справа, то правый обратный элемент  $T^{-1} \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ ; 2) при  $\|I\| = 1$  класс  $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$  состоит из нормалоидных элементов; 3) если спектр элемента  $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$  лежит на единичной окружности, то  $\|TX\| = \|X\|$  для всех  $X \in \mathcal{A}$ . Если  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , то класс  $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$  совпадает с классом всех паранормальных операторов в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ .

**Ключевые слова:** гильбертово пространство,  $C^*$ -алгебра, паранормальный оператор, квазинильпотентный оператор, изометрия, гипонормальный оператор, нормалоидный оператор, нормированная алгебра, унитарная алгебра.

Пусть  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  –  $*$ -алгебра всех линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ . Оператор  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  называется паранормальным, если  $\|T^2x\|_{\mathcal{H}} \geq \|Tx\|_{\mathcal{H}}^2$  для всех  $x \in \mathcal{H}$  с  $\|x\|_{\mathcal{H}} = 1$ , см. [1]– [3]; изометрией, если  $T^*T = I$ ; гипонормальным, если  $T^*T \geq TT^*$ .  $C^*$ -алгеброй называется комплексная банахова  $*$ -алгебра такая, что  $\|X^*X\| = \|X\|^2$  для всех  $X \in \mathcal{A}$ . По теореме Гельфанда–Наймарка любую  $C^*$ -алгебру можно реализовать как  $C^*$ -подалгебру в  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  для некоторого гильбертова пространства  $\mathcal{H}$ .

Пусть  $\mathcal{A}$  – нормированная алгебра над полем  $\Lambda$ ,  $\mathcal{A}_1 = \{X \in \mathcal{A} : \|X\| = 1\}$  и  $k \in \mathbb{N}$ . Напомним, что  $T \in \mathcal{A}$  квазинильпотент, если  $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ; нормалоидный, если  $\|T^n\| = \|T\|^n$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Введем класс

$$\mathcal{P}_k(\mathcal{A}) = \{T \in \mathcal{A} : \|T^{k+1}A\| \geq \|TA\|^{k+1} \text{ для всех } A \in \mathcal{A}_1\}.$$

Очевидно,  $0 \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$  и  $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \lambda T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$  для всех  $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$  и  $k \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 1.** Класс  $\mathcal{P}_k(\mathcal{A})$   $\|\cdot\|$ -замкнут в  $\mathcal{A}$ .

**Предложение 2.** Пусть  $\mathcal{A}$  – плотная подалгебра нормированной алгебры  $\mathcal{B}$ . Тогда  $\mathcal{P}_k(\mathcal{A}) \subset \mathcal{P}_k(\mathcal{B})$  для всех  $k \in \mathbb{N}$ .

**Предложение 3.** Пусть  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  – нормированные алгебры. Тогда  $\mathcal{P}_k(\mathcal{A}_1) \times \dots \times \mathcal{P}_k(\mathcal{A}_n) \subset \mathcal{P}_k(\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n)$  для всех  $k \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 4.** Имеем  $\mathcal{P}_1(\mathcal{A}) \subset \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$  для всех  $k \in \mathbb{N}$ .

**Следствие 5.** Пусть  $\mathcal{A}$  – нормированная унитарная алгебра и  $\|I\| = 1$ . Если  $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ , то  $T$  нормалоидный.

**Следствие 6.** Пусть  $\mathcal{A}$  – нормированная унитарная алгебра и  $\|I\| = 1$ . Если  $(0 \neq) T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ , то  $T$  не может быть квазинильпотентом.

**Предложение 7.** Пусть  $\mathcal{A}$  – нормированная алгебра.

(i) Если  $T \in \mathcal{A}$  с  $\|TX\| = \|X\|$  для всех  $X \in \mathcal{A}$ , то  $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ .

(ii) Если  $T \in \mathcal{P}_{k-1}(\mathcal{A})$  и  $T^k \in \mathcal{P}_{n-1}(\mathcal{A})$ , то  $T \in \mathcal{P}_{kn-1}(\mathcal{A})$  для всех  $k, n \geq 2$ .

**Предложение 8.** Пусть  $\mathcal{A}$  – нормированная алгебра,  $X \in \mathcal{A}_1$  и  $T \in \mathcal{A}$  такие, что  $XTX = T$ . Если  $k \in \mathbb{N}$  нечетно и  $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ , то  $XT \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ .

**Предложение 9.** Пусть нормированная алгебра  $\mathcal{A}$  унитарна. Тогда  $\lambda I \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$  для всех  $\lambda \in \Lambda$  и справедливы утверждения:

(i) если  $T \in \mathcal{A}_1$  с  $T^{k+1} = I$ , то  $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ ;

(ii) если  $T = T^{k+1} \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$  и  $\|I\| = 1$ , то  $\|T\| \in \{0, 1\}$ .

**Предложение 10.** Если  $\mathcal{A}$  – коммутативная нормированная алгебра и  $\|T^2\| = \|T\|^2$  для всех  $T \in \mathcal{A}$ , то  $\mathcal{P}_k(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$  для всех  $k \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 11.** Пусть  $\mathcal{A}$  – нормированная унитарная алгебра и  $U, V \in \mathcal{A}_1$  такие, что  $VU = I$ . Если  $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ , то  $UTV \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$  для всех  $k \in \mathbb{N}$ .

**Следствие 12.** Если  $\mathcal{A}$  унитарная  $C^*$ -алгебра и  $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ , то  $UTU^* \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$  для всех изометрий  $U \in \mathcal{A}$  и  $k \in \mathbb{N}$ .

Следствие 12 при  $k = 1$  обобщает п. (ii) теоремы 2 [4].

**Теорема 13.** Пусть  $\mathcal{A}$  – нормированная унитарная алгебра. Если элемент  $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$  обратим справа, то правый обратный элемент  $T^{-1} \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ .

**Следствие 14.** Пусть  $\mathcal{A}$  – нормированная унитарная алгебра над полем  $\mathbb{C}$  и  $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$  такой, что спектр  $\sigma(T)$  лежит на единичной окружности. Тогда  $\|TX\| = \|X\|$  для всех  $X \in \mathcal{A}$ .

**Теорема 15.** Пусть  $\mathcal{A}$  – нормированная алгебра. Если  $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ , то  $T^n \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

**Замечание 16.** Из теоремы 15 можно получить второе доказательство следствия 5.

Из теоремы 2.1 [4] (см. также теорему 1 [5]) имеем

**Следствие 17.** Если  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , то класс  $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$  совпадает с классом всех паранормальных операторов в  $\mathcal{H}$ .

Поскольку операция произведения секвенциально совместно непрерывна в сильной операторной топологии в  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  [6, задача 93], из следствия 17 вытекает

**Следствие 18.** Если  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , то класс  $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$  секвенциально замкнут в сильной операторной топологии.

**Следствие 19.** Если  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , то в  $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$  существует не гипонормальный оператор.

**Замечание 20.** Если  $\mathcal{A} = \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ , то класс  $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$  есть множество всех нормальных матриц из  $\mathcal{A}$  (теорема 2.32 [5]). Для  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$  теорема 4 установлена в [7] и [8], теорема 13 (для обратимого  $T$ ) и следствие 14 доказаны в [7], а теорема 15 – в [2].

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований и правительством Республики Татарстан, проект 15-41-02433, и выделенными Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности субсидиями 1.1515.2017/ПЧ, 1.9773.2017/8.9.

## Литература

1. Istrăţescu V. *On some hyponormal operators* // Pacific J. Math. – 1967. – V. 22. – No. 3. – P. 413–417.
2. Furuta T. *On the class of paranormal operators* // Proc. Japan Acad. – 1967. – V. 43. – No. 7. – P. 594–598.
3. Kubrusly C.S. *Hilbert space operators. A problem solving approach*. – Boston, MA: Birkhäuser Boston, Inc., 2003. – xvi+149 p.
4. Бикчентаев А.М. *Два класса  $\tau$ -измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана* // Изв. вузов. Матем. – 2017. – № 1. – С. 86–91.
5. Бикчентаев А.М. *Паранормальные  $\tau$ -измеримые операторы, присоединенные к полуконечной алгебре фон Неймана* // Матем. заметки (в печати).
6. Халмош П. *Гильбертово пространство в задачах*. – М.: Мир, 1970. – 352 с.
7. Istrăţescu V., Saito T., Yoshino T. *On a class of operators* // Tôhoku Math. J. – 1966. – V. 18. – No. 4. – P. 410–413.
8. Furuta T., Horie M., Nakamoto R. *A remark on a class of operators* // Proc. Japan Acad. – 1967. – V. 43. – No. 7. – P. 607–609.

## PARANORMAL ELEMENTS IN NORMED ALGEBRA

A.M. Bikchentaev, S.A. Abed

For a normed algebra  $\mathcal{A}$  and  $k \in \mathbb{N}$  we introduce and investigate the  $\|\cdot\|$ -closed classes

$$\mathcal{P}_k(\mathcal{A}) = \{T \in \mathcal{A} : \|T^{k+1}A\| \geq \|TA\|^{k+1} \text{ for all } A \in \mathcal{A} \text{ with } \|A\| = 1\}.$$

We show that  $\mathcal{P}_1(\mathcal{A}) \subset \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$  for all  $k \in \mathbb{N}$ . If  $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ , then  $T^n \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$  for all  $n \in \mathbb{N}$ . If  $\mathcal{A}$  is unital,  $U, V \in \mathcal{A}$  are such that  $\|U\| = \|V\| = 1$ ,  $VU = I$  and  $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ , then  $UTV \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$  for all  $k \in \mathbb{N}$ . In particular, if  $\mathcal{A}$  is a unital  $C^*$ -algebra and  $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ , then  $UTU^* \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$  for all isometries  $U \in \mathcal{A}$  and  $k \in \mathbb{N}$ . Let  $\mathcal{A}$  be unital, then 1) if an element  $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$  is right invertible then the right inverse element  $T^{-1} \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ ; 2) for  $\|I\| = 1$  the class  $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$  consists of normaloid elements; 3) if the spectrum of an element  $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$  lies on unit circle then  $\|TX\| = \|X\|$  for all  $X \in \mathcal{A}$ . If  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , then the class  $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$  coincides with the set of all paranormal operators on a Hilbert space  $\mathcal{H}$ .

Keywords: Hilbert space,  $C^*$ -algebra, paranormal operator, quasinilpotent operator, isometry, hyponormal operator, normaloid operator, normed algebra, unital algebra.