Литература

1. Горбачев Д. В., Иванов В. И. *Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля, точные для целых функций экспоненциального типа* // Матем. сб. – 2015. – Т. 206. – № 8.– С. 63–98.

2. Горбачев Д. В., Иванов В. И. *Экстремальная задача Бомана для преобразования Якоби* // Тр. ИММ УрО РАН. – 2016. – Т. 22. – № 4. – С. 126–135.

3. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Smirnov O. I. *The Delsarte extremal problem for the Jacobi transform* // Math. Notes. – 2016. – V. 100. – № 5. – P. 677–686.

SOME EXTREMAL PROBLEMS FOR FOURIER TRANSFORM ON HYPERBOLOID

D.V. Gorbachev, V.I. Ivanov, O.I. Smirnov

We study the Turán, Fejér, Delsarte, Logan and Boman extremal problems for the Fourier transform on the hyperboloid $\mathbb{H}^{d-1}$ or Lobachevskii space. By the averaging method over the sphere we reduce these problems to the problems for the Jacobi transform on the half-line. To solve them we apply Gauss and Markov quadrature formulas on the half-line for entire functions of exponential type at zeros of the Jacobi functions.

Keywords: hyperboloid, Lobachevskii space, Fourier transform, Turán, Fejér, Delsarte, Logan and Boman extremal problems, Gauss and Markov quadrature formulas for entire functions of exponential type.

УДК 517.54

ПОЛУГРУППЫ ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПОЛОСЫ И ПОЛУПЛОСКОСТИ

В.В. Горяйнов[1]

1 *goryainov_vv@hotmail.com*; Московский физико-технический институт (государственный университет)

Изучается полугруппа голоморфных отображений полосы в себя и изоморфная ей полугруппа голоморфных отображений правой полуплоскости в себя. Для голоморфных отображений полосы требуется выполнение условия, которое является аналогом гидродинамической нормировки. Получены теоремы искажения для этих отображений и выделены условия, при которых существуют области однолистности. Дано описание класса отображений, которые допускают вложение в однопараметрические полугруппы. Получен аналог уравнения Лёвнера-Куфарева для изучаемой полугруппы отображений и установлена теорема существования и единственности решений для этого уравнения.

Ключевые слова: голоморфное отображение, теоремы искажения, области однолистности, однопараметрическая полугруппа, эволюционное семейство, эволюционное уравнение.

Пусть f — голоморфное отображение полосы

$$\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C}: \ -\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2\}$$

в себя и $\operatorname{Re} f(x) \to \pm\infty$ при $x \to \pm\infty$. Инвариантную форму леммы Шварца для полосы $\mathbb{S}$ можно записать в виде

$$\frac{|f'(z)|}{\cos\{\operatorname{Im} f(z)\}} \le \frac{1}{\cos\{\operatorname{Im} z\}}.$$

Из этого неравенства легко выводится, что функция $x \mapsto \operatorname{Re}\{x - f(x)\}$ не убывает на $\mathbb{R}$. Таким образом, существуют (конечные или бесконечные) пределы

$$d^{\pm}(f) = \lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{Re}\{x - f(x)\}.$$

При этом $d^-(f) \le d^+(f)$. Обозначим через $\mathfrak{T}$ класс голоморфных отображений $f\colon \mathbb{S} \mapsto \mathbb{S}$, для которых $d^-(f) = 0$ и $d^+(f) < \infty$. В действительности, если $f \in \mathfrak{T}$, то для любого $\alpha \in (0,1)$ в полосе $\mathbb{S}_\alpha = \{z \in \mathbb{C}\colon |\operatorname{Im} z| < \alpha\pi/2\}$ выполняются предельные соотношения

$$\lim_{\operatorname{Re} z \to -\infty} (z - f(z)) = 0, \qquad \lim_{\operatorname{Re} z \to +\infty} (z - f(z)) = d^+(f).$$

Условие $(z - f(z)) \to 0$ при $\operatorname{Re} z \to -\infty$ по форме является аналогом гидродинамической нормировки, которая принята для конформных отображений полуплоскости.

Для $\delta > 0$ через $\mathfrak{T}(\delta)$ будем обозначать класс функций f из $\mathfrak{T}$, для которых $d^+(f) = \delta$. В определённом смысле параметр δ определяет степень отклонения голоморфного отображения $f\colon \mathbb{S} \mapsto \mathbb{S}$ от тождественного преобразования. В частности, для всех $z \in \mathbb{S}$ выполняется неравенство

$$\frac{\cos(\operatorname{Im} z)}{\cos(\operatorname{Im} f(z))} \le e^{\delta/2},$$

которое можно также рассматривать как некоторый аналог леммы Шварца.

Под теоремами искажения в геометрической теории функций понимаются оценки функционалов, зависящих от значений функции и её производной в фиксированной точке, в различных классах функций. Как правило, эти оценки характеризуют степень отклонения отображений, осуществляемых функциями данного класса, от тождественного преобразования. В более общей постановке изучаются области значений соответствующих функционалов. Фиксируем точку z_0 в полосе $\mathbb{S}$ и введём в рассмотрение для $\delta > 0$ два множества

$$\Omega_\delta(z_0) = \left\{ w = e^{[z_0 - f(z_0)]}\colon\ f \in \mathfrak{T}(\delta) \right\},$$
$$\Omega'_\delta(z_0) = \left\{ w = f'(z_0) e^{[z_0 - f(z_0)]}\colon\ f \in \mathfrak{T}(\delta) \right\}.$$

Описание этих множеств позволяет получить оценки отклонения отображений f класса $\mathfrak{T}(\delta)$ от тождественного преобразования.

Теорема 1. *Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ — фиксированная точка в полосе $\mathbb{S}$ и $\delta > 0$. Тогда*

$$\Omega_\delta(z_0) = \left\{ w\colon \left| w - \frac{e^{\delta + iy_0} + e^{-iy_0}}{2\cos y_0} \right| \le \frac{e^\delta - 1}{2\cos y_0}, \quad w \ne 1, e^\delta \right\}.$$

Описание второго множества содержится в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ — фиксированная точка в полосе $\mathbb{S}$ и $\delta > 0$. Тогда множество $\Omega'_\delta(z_0)$ представляет собой выпуклую оболочку кривой*

$$\Gamma_\delta(z_0) = \left\{ w = 1 + (e^\delta - 1)\frac{\cos^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 y_0} e^{i(t+2y_0)} \colon \ t \in [0, 2\pi], t \neq -2y_0 \right\}.$$

Кроме того, в классе $\mathfrak{T}(\delta)$, $\delta > 0$, имеет место точное неравенство

$$\left| f'(z) e^{[z - f(z)]} - 1 \right| \leq \frac{e^\delta - 1}{\cos^2(\operatorname{Im} z)}.$$

Отметим еще одно свойство классов $\mathfrak{T}(\delta)$ при малых значениях δ, которое выражается в существовании полос однолистности.

Теорема 3. *Пусть f принадлежит классу $\mathfrak{T}(\delta)$ и $0 < \delta < 2\ln 3$. Тогда f однолистна в полосе $\{z \colon |\operatorname{Im} z| < y^*(\delta)\}$, где $y^*(\delta)$ — единственный в интервале $0 < y < \pi/2$ корень уравнения*

$$\cos^2 y = \left(e^\delta - 1\right) \cos^3 \frac{\pi - 2y}{3}.$$

Заметим, что $y^*(\delta) \to \pi/2$ при $\delta \to 0$ и $y^*(\delta) \to 0$ при $\delta \to 2\ln 3$. Эта теорема может рассматриваться как усиление теоремы 2 из [1].

Следующие результаты связаны с тем, что класс $\mathfrak{T}$ образует топологическую полугруппу относительно операции композиции и топологии локально равномерной сходимости в полосе $\mathbb{S}$. Рассматривая $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \colon \ t \geq 0\}$ как аддитивную полугруппу с обычной топологией вещественных чисел, под однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{T}$ понимаем непрерывный гомоморфизм $t \mapsto f^t$, действующий из $\mathbb{R}_+$ в $\mathfrak{T}$. При целых неотрицательных значениях $t = 0, 1, 2, \ldots$ элементы f^n однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ представляют собой обычные итерации функции $f = f^1$. Проблема дробных итераций произвольной f из $\mathfrak{T}$ состоит в вопросе существования такой однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{T}$, для которой $f^1 = f$. Для решения этой задачи введём в рассмотрение класс $\mathscr{P}$ функций $p(z)$, голоморфных в $\mathbb{S}$ и допускающих интегральное представление

$$p(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{iu}{iu + e^{-z}} d\mu(u),$$

где μ — вероятностная мера на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая условию $\mu(\{0\}) = 0$. Замечая, что любая функция p из класса $\mathscr{P}$ не обращается в нуль в полосе $\mathbb{S}$, по ней однозначно определяется функция F посредством равенств

$$F'(z) = -1/p(z), \qquad F(0) = 0.$$

Класс всех функций F, полученных таким образом, обозначим через $\mathscr{F}$. Функции F класса $\mathscr{F}$ являются однолистными в полосе $\mathbb{S}$ и отображают её на области, обладающие свойством: с каждой своей точкой w_0 область $F(\mathbb{S})$ содержит и луч $w_0 + t$, $t \geq 0$.

Теорема 4. *Функция $f(z) \not\equiv z$ из $\mathfrak{T}$ вложима в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{T}$ в том и только том случае, если найдутся такие $F \in \mathscr{F}$ и $t > 0$, что $f(z) = F^{-1}(F(z)+t)$, $z \in \mathbb{S}$.*

Функцию F из формулировки теоремы можно рассматривать как аналог функции Кёнигса для f (см., напр., [2]).

Определение. Двупараметрическое семейство $\{f_{t,s}\colon 0 \le s \le t \le T\}$ функций $f_{t,s}$ из $\mathfrak{T}$ будем называть *эволюционным семейством* полугруппы $\mathfrak{T}$ на промежутке $[0,T]$, если выполняются следующие условия:

(i) $f_{t,s}(z) = f_{t,\tau} \circ f_{\tau,s}(z)$ при $0 \le s \le \tau \le t \le T$,

(ii) $f_{t,s}(z) \to z$ локально равномерно в $\mathbb{S}$ при $(t-s) \to 0$.

Эволюционное семейство является расширением понятия однопараметрической полугруппы и играет важную роль в геометрической теории функций и приложениях, связанных с уравнением Лёвнера. При этом, в отличие от случая однопараметрической полугруппы вопрос дифференцируемости эволюционного семейства решается гораздо сложнее. При решении этого вопроса важно правильно выбрать шкалу времени.

Пусть $\{f_{t,s}\}$ — эволюционное семейство полугруппы $\mathfrak{T}$ на промежутке $[0,T]$. Рассмотрим функцию $\delta(t) = d^+(f_{t,0})$, $0 \le t \le T$. Поскольку при $0 \le s < t \le T$ выполняется равенство

$$\delta(t) = d^+(f_{t,0}) = d^+(f_{t,s} \circ f_{s,0}) = d^+(f_{t,s}) + \delta(s)$$

и $d^+(f_{t,s}) \ge 0$, то функция $\delta(t)$ является неубывающей на $[0,T]$. При этом, если $\delta(t_1) = \delta(t_2)$, $t_1 < t_2$, то $f_{t,s}(z) \equiv z$ при $t_1 \le s \le t \le t_2$. Будем говорить, что эволюционное семейство нормировано, если $\delta(t) = t$, $0 \le t \le T$.

Теорема 5. *Пусть $\{f_{t,s}\colon 0 \le s \le t \le T\}$ — нормированное эволюционное семейство полугруппы $\mathfrak{T}$. Тогда для любых $s \in [0,T)$ и $z \in \mathbb{S}$ функция $t \mapsto f_{t,s}(z)$ абсолютно непрерывна на $[s,T]$ и является решением задачи Коши*

$$\frac{dw}{dt} = -P(w,t), \qquad w|_{t=s} = z, \tag{1}$$

где $P(z,t)$ — функция, определённая на $\mathbb{S} \times [0,T]$, голоморфная по z, измеримая по t и такая, что $P(\cdot,t) \in \mathscr{P}$ для почти всех t.

Заметим, что в силу выполнения условий теоремы единственности решения задачи Коши (1) всякое нормированное эволюционное семейство полугруппы $\mathfrak{T}$ представляет собой семейство однолистных функций. Уравнение (1) является аналогом уравнения Лёвнера—Куфарева для полугруппы $\mathfrak{T}$.

Теорема 6. *Пусть на $\mathbb{S} \times [0,T]$ определена комплекснозначная функция $P(z,t)$, которая голоморфна по z, измерима по t и удовлетворяет условию $P(\cdot,t) \in \mathscr{P}$ для почти всех $t \in [0,T]$. Тогда для любых $z \in \mathbb{S}$ и $s \in [0,T)$ существует единственное абсолютно непрерывное решение $w = w(t,z,s;P)$, $s \le t \le T$, задачи Коши (1). Кроме того, при каждом $t \in [s,T]$ отображение $w^P_{t,s}\colon z \mapsto w(t,z,s;P)$ является однолистным в $\mathbb{S}$ и принадлежит $\mathfrak{T}$, а $\{w^P_{t,s}\colon 0 \le s \le t \le T\}$ является нормированным эволюционным семейством полугруппы $\mathfrak{T}$.*

Основным инструментом в получении сформулированных выше результатов является использование изоморфизма полугруппы $\mathfrak{T}$ и полугруппы $\mathfrak{N}$ голоморфных отображений h правой полуплоскости $\mathbb{H} = \{\zeta \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}\zeta > 0\}$ в себя. Этот изоморфизм осуществляется посредством равенства $h = l \circ f \circ l^{-1}$ где $l(z) = e^{-z}$ — конформное отображение полосы $\mathbb{S}$ на полуплоскость $\mathbb{H}$. Через $\mathfrak{N}(\delta)$, $\delta > 0$, обозначим образ класса $\mathfrak{T}(\delta)$ в полугруппе $\mathfrak{N}$.

Теорема 7. *Для того чтобы голоморфная в $\mathbb{H}$ функция h принадлежала классу $\mathfrak{N}(\delta)$, $\delta > 0$, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление в виде*

$$h(\zeta) = \zeta + (e^{\delta} - 1) \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{iu\zeta}{\zeta + iu} d\mu(u),$$

где μ — вероятностная мера на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая условию $\mu(\{0\}) = 0$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-01-00674-а) и программы поддержки научных школ (грант НШ - 9110.2016.1).

Литература

1. Горяйнов В. В. *Голоморфные отображения единичного круга в себя с двумя неподвижными точками* // Матем. сб. – 2017. – Т. 208. – № 3. – С. 55–72.

2. Горяйнов В. В. *Полугруппы аналитических функций в анализе и приложениях* // УМН. – 2011. – Т. 67. – Вып. 6(408). – С. 5–52.

SEMIGROUPS OF HOLOMORPHIC MAPPINGS OF A STRIP AND HALF-PLANE

V.V. Goryainov

We study the semigroup of holomorphic mappings of a strip into itself and the semigroup of holomorphic mappings of the right half-plane into itself; the semigroups are isomorphic. For holomorphic mappings of a strip, it is necessary to satisfy the condition, which is analogous to the hydrodynamic normalization. Distortion theorems for these mappings are obtained, and the conditions under which there exist domains of univalence are distinguished. An analogue of the Loewner-Kufarev equation for the semigroup of mappings studied is obtained and an existence and uniqueness theorem for solutions for this equation is established.

Keywords: holomorphic mapping, distortion theorems, domains of univalence, one-parameter semigroup, evolution family, evolution equation.