problem are obtained.

Keywords: Barbashin integro-differential equation, Chachy problem, Volterra integral equation with partial integrals.

УДК 517.956.25

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ В R^N

А.Ш. Камалетдинов[1], Л.М. Кожевникова[2]

1 *kamaletdinovaleksandr@mail.ru*; Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, факультет математики и информационных технологий
2 *kosul@mail.ru*; Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, факультет математики и информационных технологий

В работе рассматривается некоторый класс анизотропных эллиптических уравнений второго порядка дивергентного вида с переменными нелинейностями. В пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, изучаются условия разрешимости уравнений. Доказано существование решений без ограничений на рост входных данных при $|\mathrm{x}| \to \infty$.

Ключевые слова: анизотропное эллиптическое уравнение, существование решения, переменные показатели, псевдомонотонный оператор.

Рассматриваются анизотропные квазилинейные эллиптические уравнения второго порядка

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i(\mathrm{x},u,\nabla u))_{x_i} - a_0(\mathrm{x},u,\nabla u) = 0, \quad \mathrm{x} = (x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Предполагается, что функции $a_i(\mathrm{x},s_0,s_1,\dots,s_n)$ имеют степенной рост по переменным s_i с показателями $p_i(\mathrm{x}) \in (1,\infty)$, $i = 0,1,\dots,n$. В качестве простейшего примера можно привести уравнение

$$\sum_{i=1}^{n}(|u_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})-2}u_{x_i})_{x_i} - |u|^{p_0(\mathrm{x})-2}u = \sum_{i=1}^{n}(\phi_i(\mathrm{x}))_{x_i} - \phi_0(\mathrm{x}). \tag{2}$$

В 1984 г. Х. Брезис [1] на примере уравнения

$$-\Delta u + |u|^{p_0-2}u = f(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n, \quad p_0 > 2,$$

и его обобщений показал, что есть эллиптические уравнения в неограниченных областях, для которых существуют единственные решения соответствующих краевых задач без предположений на их поведение и рост входных данных на бесконечности.

Л. Боккардо, Т. Галуа, Ж. Вазкез в [2] доказали существование решения уравнения

$$-\sum_{i=1}^{n}\left(|\nabla u|^{p-2}u_{x_i}\right)_{x_i} + |u|^{p_0-2}u = f(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n,$$

без условий на бесконечности при $p > 2 - 1/n,\ p_0 > p$. Кроме того, авторы показали, что условие $p_0 > p$ необходимо для существования решения, если на рост функции f на бесконечности не накладывается никаких ограничений.

Г.И. Лаптевым в [3] изучались условия существования решений уравнений

$$-\sum_{i=1}^{n}(a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u))_{x_\alpha} + a_0(\mathrm{x}, u) = f(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2.$$

Функции $a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}),\ i = 1, \ldots, n,\ a_0(\mathrm{x}, s_0),\ f(\mathrm{x})$ могут расти произвольно при $|\mathrm{x}| \to \infty$. Эти функции удовлетворяют обобщенным условиям теории монотонных операторов по аргументам $s_0 \in \mathbb{R},\ \mathrm{s} \in \mathbb{R}^n$. Функции $a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}),\ i = 1, \ldots, n,$ по переменным $s_0 \in \mathbb{R},\ \mathrm{s} \in \mathbb{R}^n$ имеют стенной рост с показателями $p - 1,\ p_0(p-1)/p$, соответственно. При условии, что $n < p < p_0$ доказана теорема существования решения $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Л.М. Кожевниковой и А.А. Хаджи в [4] для некоторого класса анизотропных эллиптических уравнений второго порядка с нестепенными нелинейностями доказана теорема существования без ограничений на рост входных данных при $|\mathrm{x}| \to \infty$. М.М. Бокало и Е.В. Доманская в [5] исследовали краевые задачи в неограниченных областях для класса эллиптических анизотропных уравнений с переменными показателями нелинейностей, модельным примером которых является уравнение (2). Корректность краевых задач доказана без ограничений на поведение решений и условий на рост исходных данных на бесконечности. Следует отметить, что в [4], [5] установлено существование решений эллиптических уравнений в неограниченных областях с соответствующими операторами, удовлетворяющими условию монотонности. В настоящей работе рассматривается более широкий класс эллиптических анизотропных уравнений с переменными показателями нелинейностей с соответствующими псевдомонотонными операторами. Доказана разрешимость уравнения (1) в пространстве $\mathbb{R}^n$, никаких условий на поведение решений и рост входных данных при $|x| \to \infty$ не накладывается.

Сначала определим пространства с переменным показателями. Пусть Q произвольная область пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим

$$C^+(\overline{Q}) = \{p(\mathrm{x}) \in C(\overline{Q}) \,:\, 1 < p^- \leq p^+ < +\infty\},$$

где $p^- = \inf\limits_{Q} p(\mathrm{x}),\ \ p^+ = \sup\limits_{Q} p(\mathrm{x})$. Пусть $p(\mathrm{x}) \in C^+(\overline{Q})$, определим лебегово пространство с переменным показателем $L_{p(\cdot)}(Q)$ как множество измеримых на Q вещественнозначных функций $v(\mathrm{x})$ таких, что:

$$\rho_{p(\cdot),Q}(v) = \int\limits_{Q} |v(\mathrm{x})|^{p(\mathrm{x})} d\mathrm{x} < \infty,$$

с нормой Люксембурга

$$\|v\|_{p(\cdot),Q} = \|v\|_{L_{p(\cdot)}(Q)} = \inf\left\{k > 0 \,\middle|\, \rho_{p(\cdot),Q}(v/k) \leq 1\right\}.$$

Обозначим $\vec{\mathrm{p}}(\mathrm{x}) = (p_1(\mathrm{x}), p_2(\mathrm{x}), \ldots, p_n(\mathrm{x})) \in (C^+(\overline{Q}))^n$ и положим $p_+(\mathrm{x}) =$

$\max_{i=\overline{1,n}} p_i(\mathrm{x})$, $\mathrm{x} \in Q$. Анизотропное пространство Соболева с переменными показателями $\mathring{H}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q)$ определим как пополнение пространства $C_0^\infty(Q)$ по норме

$$\|v\|_{\mathring{H}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q)} = \sum_{i=1}^{n} \|v_{x_i}\|_{p_i(\cdot),Q}.$$

Пространство $\mathring{H}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q)$ является рефлексивным банаховым [6].

Существенное значение в полученных результатах играет теорема вложения для пространства $\mathring{H}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q)$, установленная Х. Фаном [6]. Пусть

$$\overline{p}(\mathrm{x}) = n\left(\sum_{i=1}^{n} 1/p_i(\mathrm{x})\right)^{-1}, \quad p_*(\mathrm{x}) = \begin{cases} \frac{n\overline{p}(\mathrm{x})}{n-\overline{p}(\mathrm{x})}, & \overline{p}(\mathrm{x}) < n, \\ +\infty, & \overline{p}(\mathrm{x}) \geq n, \end{cases}$$

$$p_\infty(\mathrm{x}) = \max\{p_*(\mathrm{x}), p_+(\mathrm{x})\}.$$

Теорема вложения. *Пусть Q — ограниченная область и $\overrightarrow{\mathrm{p}}(\mathrm{x}) = (p_1(\mathrm{x}), p_2(\mathrm{x}), ..., p_n(\mathrm{x})) \in (C^+(\overline{Q}))^n$. Если $q(\mathrm{x}) \in C^+(\overline{Q})$ и*

$$q(\mathrm{x}) < p_\infty(\mathrm{x}) \quad \forall\, \mathrm{x} \in Q, \tag{3}$$

то имеет место непрерывное и компактное вложение $\mathring{H}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q) \hookrightarrow L_{q(\cdot)}(Q)$.

Сформулируем условия, которые накладываются на функции, входящие в уравнение (1). Пусть $\overrightarrow{\mathbf{p}}(\mathrm{x}) = (p_0(\mathrm{x}), p_1(\mathrm{x}), ..., p_n(\mathrm{x})) \in (C^+(\mathbb{R}^n))^{n+1}$ и

$$p_+(\mathrm{x}) \leq p_0(\mathrm{x}) < p_*(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \Omega. \tag{4}$$

Предполагается, что функции $a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})$, $i = 0, \ldots, n$, измеримы по $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ для $\mathbf{s} = (s_0, \mathrm{s}) = (s_0, s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, непрерывны по $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n+1}$ для п.в. $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, существуют измеримые положительные $\varphi(\mathrm{x}), \Phi(\mathrm{x})$ и неотрицательные функции $\phi(\mathrm{x})$, $\Phi_i(\mathrm{x})$, $i = 0, 1, \ldots, n$, такие что для п. в. $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ и любых $\mathbf{s} = (s_0, \mathrm{s}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ справедливы неравенства

$$|a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})| \leq \Phi(\mathrm{x})\mathbf{P}(\mathbf{s})^{1/p_i'(\mathrm{x})} + \Phi_i(\mathrm{x}), \quad i = 0, 1, \ldots, n; \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) - a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{t}))(s_i - t_i) > 0, \quad \mathrm{s} \neq \mathrm{t}; \tag{6}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) s_i \geq \varphi(\mathrm{x})\mathbf{P}(\mathbf{s}) - \phi(\mathrm{x}), \tag{7}$$

$\mathbf{P}(\mathbf{s}) = \sum\limits_{i=0}^{n} |s_i|^{p_i(\mathrm{x})}$.

Введем обозначение $v_{x_0} = v$. Определим пространство Соболева с переменными показателями $W^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(Q)$ как пополнение пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме

$$\|v\|_{W^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(Q)} = \sum_{i=0}^{n} \|v_{x_i}\|_{p_i(\cdot),Q}.$$

Далее, определим $L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $W^1_{\vec{\mathbf{p}}(\cdot),\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ как пространства, состоящие из измеримых функций $v(\mathrm{x})$, определенных в $\mathbb{R}^n$, и при этом $v(\mathrm{x}) \in L_\infty(Q)$, $L_1(Q)$, $W^1_{\vec{\mathbf{p}}(\cdot)}(Q)$, соответственно, для любой ограниченной $Q \subset \mathbb{R}^n$.

Будем считать, что неотрицательные функции

$$\Phi_i \in L_{p_i'(\cdot),\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n),\ \phi \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad i = 0, 1, \ldots, n; \tag{8}$$

$$\Phi,\ 1/\varphi,\ \varphi \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n). \tag{9}$$

Определение. *Обобщенным решением уравнения* (1) *назовем функцию* $u(\mathrm{x}) \in W^1_{\vec{\mathbf{p}}(\cdot),\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$*, удовлетворяющую интегральному тождеству*

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=0}^{n} a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u)\, v_{x_i}\, d\mathrm{x} = 0$$

для любой функции $v(\mathrm{x}) \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$.

Теорема. *Если выполнены условия* (4) – (9)*, то существует обобщенное решение уравнения* (1).

Литература

1. Brezis H. *Semilinear equations in R_N without condition at infnity* // Appl. Math. Optim. – 1984. – T. 12. – № 3. – P. 271–282.

2. Boccardo L. Gallouet T., Vazquez J.L. *Nonlinear elliptic equations in R_N without growth restrictions on the data* // Differential Equations. – 1993. – T. 105. – № 2. – P. 334–363.

3. Laptev G.I. *Existence of solutions of certain quasilinear elliptic equations in R_N without conditions at infinity* // J. of Math. Sciences (New York). – 2008. – T. 150. – № 5. – P. 2384–2394.

4. Кожевникова Л.М., Хаджи А.А. *Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях* // Матем. сборник. – 2015. – Т. 206. – № 8. – С. 99–126.

5. Bokalo M., Domanska O. *On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces* // Mathematychni Studii. – 2007. – T. 28. – № 1. – P. 77–91.

6. Fan X. *Anisotropic variable exponent Sobolev spaces and p(x) Laplacian equations* // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2011. – T. 56. – № 7–9. – P. 623–642.

EXISTENCE OF SOLUTIONS OF ANISOTROPIC ELLIPTIC EQUATIONS
WITH VARIABLE EXPONENTS OF NONLINEARITY IN R^N

A.Sh. Kamaletdinov, L.M. Kozhevnikova

We consider a class of anisotropic elliptic equations of the second order with divergent form and variable non-linearities. In $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, we obtain solvability conditions equations. The proof of the existence of solutions without restrictions on growth of the input data for $|\mathrm{x}| \to \infty$ *is given.*

Keywords: anisotropic elliptic equation, existence solution, variable exponent, pseudomonotone operator.