Литература

1. Szegö G. *Zur Theorie der schlichten Abbildungen* // Math. Ann. – 1928. – № 100(1). – P. 188–211.

2. Jenkins J.A. *On an inequality of Golusin* // Amer. J. Math. – 1951. – № 73. – P. 181–185.

3. Ponnusamy S., Kaliraj A.S., Starkov V.V. *Sections of univalent harmonic mappings* // Indagationes Mathematicae. – 2017. – V. 28, № 2. – P. 527–540.

4. Ponnusamy S., Kaliraj A.S., Starkov V.V. *Coefficients of univalent harmonic mappings* // Monatshefte fur Mathematik. – 2017. – P. 1–18.

5. Starkov V.V. *Univalence of harmonic functions, problem of Ponnusamy and Sairam, and constructions of univalent polynomials* // Probl. Anal. Issues Anal. – 2014. – V. 3, № 21. – P. 59–73.

UNIVALENCE RADIUS OF SECTIONS AND COEFFICIENTS OF UNIVALENT HARMONIC MAPPINGS

S. Kaliraj, S. Ponnusamy, V.V. Starkov

Let S_H^0 denote the class of all functions $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n}$ that are sense-preserving, harmonic and univalent in the open unit disk $|z| < 1$. The coefficient conjecture for S_H^0 is still open *even for $|a_2|$. The aim of this paper is to show that if $f =\in S_H^0$ then $|a_n| < 5.24 \times 10^{-6} n^{17}$ and $|b_n| < 2.32 \times 10^{-7} n^{17}$ for all $n \geq 3$. Making use of these coefficient estimates, we also obtain radius of univalence of sections of univalent harmonic mappings. We determine the radius of univalence of sections of normalized univalent harmonic mappings for which the range is convex (resp. starlike, close-to-convex, convex in one direction). Our result on the radius of univalence of section $s_{n,n}(f)$ is sharp especially when the corresponding mappings have convex range.*

Keywords: harmonic univalent functions, partial sums, coefficient bounds.

УДК 517.9

НЕЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ БАРБАШИНА С ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.С. Калитвин[1], В.А. Калитвин[2]

1 *kalitvinas@mail.ru*; Липецкий государственный педагогический университет им. П.П. Семенова-Тян-Шанского

2 *kalitvin@gmail.com*; Липецкий государственный педагогический университет им. П.П. Семенова-Тян-Шанского

В статье рассматривается задача Коши для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Барбашина с частной производной второго порядка. Рассматриваемая задача эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра с частными интегралами. Получены условия однозначной разрешимости интегрального уравнения, следовательно, и задачи Коши.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение Барбашина, задача Коши, интегральное уравнение Вольтерра с частными интегралами.

Интегро-дифференциальным уравнением Барбашина (ИДУБ) мы будем называть интегро-дифференциальное уравнение, в котором неизвестная функция содержится под знаком частной производной и под знаком интеграла, причём частная производная этой функции вычисляется по одной переменной, а ее интегрирование производится по другой переменной.

Основы теории ИДУБ с частной производной первого порядка построены в [1]. При этом ИДУБ интерпретировались как дифференциальные уравнения в банаховом пространстве или сводились к интегральным уравнениям с частными интегралами.

При интерпретации линейных ИДУБ дифференциальными уравнениями в банаховом пространстве разрешимость последних обеспечивается условиями сильной непрерывности оператор-функций, определяющих дифференциальные уравнения. Такие условия содержатся в [1] в случаях, когда оператор-функции принимают значения в пространствах линейных операторов, непрерывных в пространстве непрерывных функций, в пространствах Лебега, в банаховых идеальных пространствах.

В случае сведения задачи Коши для линейных ИДУБ к линейным интегральным уравнениям Вольтерра с частными интегралами однозначная разрешимость интегральных уравнений обеспечивается равенством нулю спектрального радиуса соответствующего линейного оператора Вольтерра с частными интегралами. Условия равенства нулю спектрального радиуса линейных операторов Вольтерра с частными интегралами в различных классах функциональных пространств приведены в [2-4]. Отметим работу [5], в которой приведён пример банахова функционального пространства и линейного оператора Вольтерра с частными интегралами и непрерывными ядрами, спектральный радиус которого в этом пространстве больше нуля.

В данной заметке рассматривается нелинейное ИДУБ

$$\frac{\partial^2 x(t,s)}{\partial t^2} = f(t,s,x(t,s)) + \int_c^d n(t,s,\sigma,x(t,\sigma))d\sigma + g(t,s) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(a,s) = \varphi(s), x'_t(a,s) = \psi(s). \tag{2}$$

Предполагается, что $t \in [a,b]$, $s \in [c,d]$, $[a,b]$ и $[c,d]$ — конечные отрезки, заданные функции f, n, g, φ, ψ непрерывны, функции f и n удовлетворяют условию Липшица:

$$|f(t,s,u) - f(t,s,v)| \le f_0(t,s)|u-v|,\ |n(t,s,\sigma,u) - n(t,s,\sigma,v)| \le n_0(t,s,\sigma)|u-v|,$$

где f_0 и n_0 — некоторые непрерывные функции, интеграл в (1) понимается в смысле Лебега, а решением задачи (1)/(2) считается непрерывная на $[a,b]\times[c,d]$ вместе с $x''_{tt}(t,s)$ функция $x(t,s)$, удовлетворяющая ИДУБ (1) и начальным условиям (2).

Интегрируя обе части уравнения (1) по отрезку $[a,t]$ и учитывая второе условие в (2), получим эквивалентное задаче (1)/(2) ИДУБ с частной производной по t первого порядка и начальным условием $x(a,s) = \varphi(s)$. Интегрируя обе части полученного уравнения по отрезку $[a,t]$ и учитывая последнее начальное условие, получаем следующее эквивалентное задаче (1)/(2) интегральное уравнение Вольтерра с частными интегралами:

$$x(t,s) = \int_a^t (t-\tau)f(\tau,s,x(\tau,s))d\tau + \int_a^t \int_c^d (t-\tau)n(\tau,s,\sigma,x(\tau,\sigma))d\tau d\sigma + p(t,s), \tag{3}$$

где

$$p(t,s)=\varphi(s)+(t-a)\psi(s)+\int_a^t\int_a^\tau g(\tau_1,s)d\tau_1 d\tau,$$

а под решением уравнения понимается непрерывная вместе с $x_t'(t,s)$ функция $x(t,s)$.

Оператор, определяемый суммой первых двух слагаемых правой части уравнения (3), обозначим через A.

Пусть $D=[a,b]\times[c,d]$, а $C(D)$, $C(D\times[c,d]\times(-\infty,+\infty))$ и $C([c,d])$ — пространства непрерывных на D, $D\times[c,d]\times(-\infty,+\infty)$ и $[c,d]$ соответственно функций.

Теорема 1. *Если функции $f\in C(D\times(-\infty,+\infty))$, $n\in C(D\times[c,d]\times(-\infty,+\infty))$ и удовлетворяют условию Липшица, $g\in C(D)$, $\varphi,\psi\in C([c,d])$, то уравнение (3) имеет единственное непрерывное на D вместе с $x_t'(t,s)$ решение и оно может быть найдено методом последовательных приближений $x_{n+1}=Ax_n+p$ $(n=0,1,2,\cdots)$ с произвольной функцией $x_0\in C(D)$, для которой $x_{0t}'\in C(D)$.*

Доказательство. Пусть x и y — произвольные функции из $C(D)$. Из (3) и условий Липшица для функций f и n имеем

$$|(Ax)(t,s)+p(t,s)-(Ay)(t,s)-p(t,s)|\le\int_a^t|(t-\tau)[f(\tau,s,x(\tau,s))-f(\tau,s,y(\tau,s))]|d\tau+$$

$$+\int_a^t\int_c^d|(t-\tau)[n(\tau,s,\sigma,x(\tau,\sigma))-n(\tau,s,\sigma,y(\tau,\sigma))]|d\tau d\sigma\le$$

$$\le\int_a^t|(t-\tau)f_0(\tau,s)[x(\tau,s)-y(\tau,s)]|d\tau+\int_a^t\int_c^d|(t-\tau)n_0(\tau,s,\sigma)[x(\tau,\sigma)-y(\tau,\sigma)]|d\tau d\sigma. \tag{4}$$

В силу непрерывности функций $f_0(t,s)$ и $n_0(t,s,\sigma)$ спектральный радиус линейного оператора

$$(A_0x)(t,s)=\int_a^t|(t-\tau)f_0(\tau,s)|x(\tau,s)d\tau+\int_a^t\int_c^d|(t-\tau)n_0(\tau,s,\sigma)|x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma$$

равен нулю [2, 3]. По формуле Гельфанда для спектрального радиуса отсюда следует, что некоторая степень оператора A_0 является сжимающим оператором [6]. Отсюда и (4) имеем, что некоторая степень оператора $(Bx)(t,s)\equiv(Ax)(t,s)+p(t,s)$ является сжимающим оператором. Тогда по теореме Банаха о сжимающих отображениях уравнение $x=Bx\equiv Ax+p$ имеет единственное решение в $C(D)$ и оно может быть найдено методом последовательных приближений.

В силу непрерывности заданных функций решение $x(t,s)$ уравнения (3) имеет непрерывную частную производную $x_t'(t,s)$. Теорема доказана.

Отметим, что спектральный радиус оператора A_0 равен нулю, если $|(t-\tau)f_0(\tau,s)|\in C(L^1([a,b])$ и $|(t-\tau)n_0(\tau,s,\sigma)|\in C(L^1(D))$, где $C(L^1([a,b])$ и $C(L^1(D))$ — пространства непрерывных по $(t,s)\in D$ вектор-функций со значениями в $L^1([a,b])$ и $L^1(D)$ соответственно [3, 4]. Поэтому утверждение теоремы 1 остаётся в силе, если в условии Липшица для заданных функций $f(t,s,u)$ и $n(t,s,\sigma,u)$ непрерывность функций $f_0(t,s)$ и $n_0(t,s,\sigma)$ заменить условиями $|(t-\tau)f_0(\tau,s)|\in C(L^1([a,b])$ и $|(t-\tau)n_0(\tau,s,\sigma)|\in C(L^1(D))$.

Теорема 1 остаётся справедливой и в случаях, когда непрерывность функций $f_0(t,s)$ и $n_0(t,s,\sigma)$ заменяется другими условиями, при которых спектральный радиус оператора A_0 в пространстве $C(D)$ равен нулю [3, 4].

Из теоремы 1 и эквивалентности в описанном выше смысле задачи (1)/(2) уравнению (3) вытекает

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 задача (1)/(2) имеет единственное решение.*

Из приведённых теорем следует непрерывная зависимость решения уравнения (3) и задачи (1)/(2) при возмущении заданных в условии этих теорем функций функциями $\Delta f \in C(D\times(-\infty,+\infty))$, $\Delta n \in C(D\times[c,d]\times(-\infty,+\infty))$, удовлетворяющих условию Липшица, и функциями $\Delta\varphi, \Delta\psi \in C([c,d])$.

Обобщением уравнения (1) является ИДУБ

$$\frac{\partial^2 x(t,s)}{\partial t^2} + a(t,s)\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = f(t,s,x(t,s)) + \int_c^d n(t,s,\sigma,x(t,\sigma))d\sigma + g(t,s), \tag{5}$$

где функция $a(t,s)$ непрерывна на D вместе с $a'_t(t,s)$, а функции f,n,g удовлетворяют приведённым выше условиям. Решением задачи (5)/(2) считается непрерывная на $[a,b]\times[c,d]$ вместе с $x''_{tt}(t,s)$ функция $x(t,s)$, удовлетворяющая ИДУБ (5) и начальным условиям (2). Так же, как и выше, задача Коши (5)/(2) сводится к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра с частными интегралами, под решением которого понимается непрерывная вместе с $x'_t(t,s)$ функция $x(t,s)$. Полученное интегральное уравнение имеет единственное непрерывное на D вместе с $x'_t(t,s)$ решение и оно может быть найдено методом последовательных приближений. Задача Коши (5)/(2) имеет единственное решение.

Литература

1. Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P. *Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations.* – New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. – 560 p.

2. Калитвин А. С. *Линейные операторы с частными интегралами.* – Воронеж: ЦЧКИ, 2000. – 252 с.

3. Калитвин А. С., Калитвин В. А. *Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами.* – Липецк: ЛГПУ, 2006. – 177 с.

4. Калитвин А. С., Фролова Е. В. *Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория.* – Липецк: ЛГПУ, 2004. – 195 с.

5. Калитвин А. С. *Об операторах Вольтерра с частными интегралами* // Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2012: Материалы межд. конф. / под редакцией В.А. Костина. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012. – С. 91–94.

6. Красносельский М. А. и др. *Приближённое решение операторных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 456 с.

NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL BARBASHIN EQUATION WITH A PARTIAL SECOND-ORDER DERIVATIVE

A.S. Kalitvin, B.A. Kalitvin

The Cauchy problem for a nonlinear integro-differential Barbashin equation with a partial second-order derivative is considered. The problem is equivalent to the integral Volterra equation with partial integrals. Conditions for the unique solvability of the integral equation and consequently, the Cauchy

problem are obtained.

Keywords: Barbashin integro-differential equation, Chachy problem, Volterra integral equation with partial integrals.

УДК 517.956.25

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ В R^N

А.Ш. Камалетдинов[1], Л.М. Кожевникова[2]

1 *kamaletdinovaleksandr@mail.ru*; Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, факультет математики и информационных технологий
2 *kosul@mail.ru*; Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, факультет математики и информационных технологий

В работе рассматривается некоторый класс анизотропных эллиптических уравнений второго порядка дивергентного вида с переменными нелинейностями. В пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, изучаются условия разрешимости уравнений. Доказано существование решений без ограничений на рост входных данных при $|\mathrm{x}| \to \infty$.

Ключевые слова: анизотропное эллиптическое уравнение, существование решения, переменные показатели, псевдомонотонный оператор.

Рассматриваются анизотропные квазилинейные эллиптические уравнения второго порядка

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i(\mathrm{x},u,\nabla u))_{x_i} - a_0(\mathrm{x},u,\nabla u) = 0, \quad \mathrm{x} = (x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Предполагается, что функции $a_i(\mathrm{x},s_0,s_1,\dots,s_n)$ имеют степенной рост по переменным s_i с показателями $p_i(\mathrm{x}) \in (1,\infty)$, $i = 0,1,\dots,n$. В качестве простейшего примера можно привести уравнение

$$\sum_{i=1}^{n}(|u_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})-2}u_{x_i})_{x_i} - |u|^{p_0(\mathrm{x})-2}u = \sum_{i=1}^{n}(\phi_i(\mathrm{x}))_{x_i} - \phi_0(\mathrm{x}). \tag{2}$$

В 1984 г. Х. Брезис [1] на примере уравнения

$$-\Delta u + |u|^{p_0-2}u = f(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n, \quad p_0 > 2,$$

и его обобщений показал, что есть эллиптические уравнения в неограниченных областях, для которых существуют единственные решения соответствующих краевых задач без предположений на их поведение и рост входных данных на бесконечности.

Л. Боккардо, Т. Галуа, Ж. Вазкез в [2] доказали существование решения уравнения

$$-\sum_{i=1}^{n}\left(|\nabla u|^{p-2}u_{x_i}\right)_{x_i} + |u|^{p_0-2}u = f(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n,$$