где $r = |z|$*, причем константы* $1/3$*,* $1/2$ *и* $1/4$ *не могут быть улучшены.*

Литература

1. Bohr H. *A theorem concerning power series* // Proc. London Math. Soc. – 1914. – V. 13, № 2. – P. 1–5.

ON THE BOHR INEQUALITY WITH A FIXED ZERO COEFFICIENT

S.A. Alkhaleefah, I.R. Kayumov, S. Ponnusamy

An improved version of the Bohr inequality for analytic functions defined on the unit disc $D = \{z \in C : |z| \le 1\}$ *is obtained.*

Keywords: Bohr inequality, analytic functions.

УДК 517.275, 517.517

КРИТЕРИЙ ПОЛНОЙ α–ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИ

К.Ф. Амозова[1], Е.Г. Ганенкова[2], С. Поннусами[3]

1 *amokira@rambler.ru*; Петрозаводский государственный университет
2 *g_ek@inbox.ru*; Петрозаводский государственный университет
3 *samy@isichennai.res.in*; Indian Statistical Institute, Chennai Centre SETS

В статье представлен критерий полной α*–достижимости для полигармонических функций. Как следствие, отсюда получен критерий полной звездообразности (случай* $\alpha = 0$*) для полигармонических функций.*

Ключевые слова: полигармоническая функция, вполне α–достижимая функция, α–достижимая область, звездообразная область.

В некоторых разделах математики (например, в теоремах вложения, в теории интегральных представлений функции, в вопросах граничного поведения функций, разрешимости задачи Дирихле) важно, чтобы область определения функции $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяла *условию конуса*, т. е. чтобы существовали универсальные для Ω числа $\alpha \in (0;1)$ и $H \in (0;\infty]$ такие, что для каждой точки $p \in \Omega$ прямой круговой конус $V(l(p), H)$ с вершиной в точке p, раствора $\alpha\pi$, высотой H, осью симметрии $l(p)$ лежал в Ω [1].

Обозначим через $\mathbb{B}^n[x, R]$ замкнутый евклидов шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x и радиуса R. В [2] были определены α–достижимые области:

Определение 1. [2] *Область* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*,* $0 \in \Omega$*, называется* α*–достижимой (относительно 0),* $\alpha \in [0;1)$*, если для каждой точки* $p \in \partial\Omega$ *существует такое число* $r = r(p) > 0$*, что конус*

$$K_+(p, \alpha, r) = \left\{ x \in \mathbb{B}^n[p, r] : \left(x - p, \frac{p}{\|p\|} \right) \ge \|x - p\| \cos\frac{\alpha\pi}{2} \right\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega.$$

В [2] было показано, что α–достижимые области являются областями с условием конуса, при этом $l(p) = -p$, и было доказано, что α–достижимые области являются звездообразными. В случае $\alpha = 0$ класс 0–достижимых областей в $\mathbb{R}^n$ совпадает с классом областей, звездообразных относительно 0. Об α–достижимых областях см. также [3].

Эти области в плоском случае ($n = 2$) исследовали J. Stankiewicz [4–5], D.A. Brannan и W.E. Kirwan [6].

Так, например, в [4–5] J. Stankiewicz рассматривал класс $S_{1-\alpha}$, состоящий из $(1-\alpha)$–звездообразных, $\alpha \in [0;1]$, аналитических в единичном круге $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций вида $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$, $a_1 \neq 0$, удовлетворяющих условию

$$\left|\arg \frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \frac{(1-\alpha)\pi}{2} \quad \forall z \in \mathbb{B},$$

и показал, что область $\Omega \neq \mathbb{C}$ α–достижима $\Longleftrightarrow \Omega = f(\mathbb{B})$, где f — некоторая функция из класса $S_{1-\alpha}$.

В [2] P. Liczberski и В. Старков обобщили этот результат на класс биголоморфных в открытом единичном евклидовом шаре $\mathbb{B}^N$, $N \geq 1$, функций $f : \mathbb{B}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$, таких, что $f(0) = 0$ и

$$\Re\{z^*(Df(z))^{-1} f(z)\} \geq \|z^*(Df(z))^{-1}\| \cdot \|f(z)\| \cdot \sin\frac{\alpha\pi}{2} \quad \forall z \in \mathbb{B}^N,$$

и доказали, что все такие функции, отображающие $\mathbb{B}^N$ на α–достижимые области, обладают *свойством наследственности* (наследуют α–достижимость), т. е. если $r \in (0;1)$, то каждая область $f(r\mathbb{B}^N)$ α–достижима, $\alpha \in (0;1)$.

Известно, что в классе гармонических функций $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$, сохраняющих ориентацию в $\mathbb{B}$, свойство выпуклости или звездообразности $f(\mathbb{B})$ не наследуется. В таких случаях, выделяют и рассматривают подкласс функций, которые обладают свойством наследственности (см. [7]).

Далее дадим определение p–гармонической функций.

Определение 2. [8] *Функция $f \in C^{2p}(\mathbb{B})$, $p \in \mathbb{N}$, называется p–гармонической (или полигармонической), если $\Delta^p f = 0$ в $\mathbb{B}$, где Δ — оператор Лапласа.*

Известно, что p–гармоническая сохраняющая ориентацию в $\mathbb{B}$ фунция, может быть представлена в виде

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{p} |z|^{2(k-1)} F_{p-k+1}(z), \tag{1}$$

где функции $F_{p-k+1} = h_{p-k+1} + \overline{g}_{p-k+1}$, $k = 1, \dots, p$, являются гармоническими, h_{p-k+1} и g_{p-k+1} — аналитическими в $\mathbb{B}$. Заметим, что каждая гармоническая функция является p–гармонической.

В этом классе p–гармонических функций рассмотрим подкласс функций, наследующих α–достижимость.

Определение 3. [9] *Будем говорить, что p–гармоническая функция Φ, $\Phi(0) = 0$, $J_\Phi(z) > 0$, является вполне α–достижимой, $\alpha \in [0,1)$, если для каждого $r \in (0,1]$ функция Φ отображает $\mathbb{B}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ на α–достижимую область.*

Теорема 1. [9] *Пусть Φ является p–гармонической функцией в $\mathbb{B}$ вида* (1), $\Phi(0) = 0$, *и $J_\Phi(z) > 0$ в $\mathbb{B}$. Тогда Φ вполне α–достижима, $\alpha \in [0,1)$ $\Longleftrightarrow$ для любого $z \in \mathbb{B}$ выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{p} |z|^{2(k-1)} \Re\{z(h'_{p-k+1}\overline{\Phi} - g'_{p-k+1}\Phi)\} \geq \sin\tfrac{\alpha\pi}{2} \cdot |\Phi| \cdot L^{1/2},$$

где $L = \Re^2\left\{z\sum_{k=1}^{p}|z|^{2k-2}(h'_{p-k+1} - g'_{p-k+1})\right\} + \Im^2\left\{z\sum_{k=1}^{p}|z|^{2k-2}(h'_{p-k+1} + g'_{p-k+1})\right\}.$

Как следствие, отсюда получаем критерий полной α–достижимости для бигармонических ($p=2$) функций.

Следствие 1. *Пусть* $\Phi(z) = |z|^2 F_1(z) + F_2(z)$ *— бигармоническая функция в* $\mathbb{B}$, *где* $\Phi(0) = 0$, $F_k = h_k + \overline{g}_k$ $(k = 1,2)$ *— гармонические функции в* $\mathbb{B}$. *Тогда* Φ *вполне* α*-достижима,* $\alpha \in [0,1) \iff$ *для любого* $z \in \mathbb{B}$ *выполняется неравенство*

$$|z|^2 \mathrm{Re}\left\{z(h'_1\overline{\Phi} - g'_1\Phi)\right\} + \mathrm{Re}\left\{z(h'_2\overline{\Phi} - g'_2\Phi)\right\} \geq \sin\frac{\alpha\pi}{2} \cdot |\Phi| \cdot L, \tag{2}$$

$$\text{где } L^2 = |z|^6(|h'_1|^2 + |g'_1|^2) + |z|^2(|h'_2|^2 + |g'_2|^2) + 2|z|^4 \mathrm{Re}\left\{h'_1\overline{h_2}' + g'_1\overline{g_2}'\right\} -$$
$$-2\mathrm{Re}\left\{z^2(h'_2 g'_2 + |z|^4 h'_1 g'_1)\right\} - 2|z|^2\mathrm{Re}\left\{z^2(h'_1 g'_2 + g'_1 h'_2)\right\}.$$

В случае $\alpha = 0$ мы получаем критерий полной звездообразности для p–гармонических функций.

Следствие 2. *Пусть* Φ *является* p*–гармонической функцией в* $\mathbb{B}$ *вида* (1), $\Phi(0) = 0$, *и* $J_\Phi(z) > 0$ *в* $\mathbb{B}$. *Тогда* Φ *вполне звездообразна* $\iff$

$$\sum_{k=1}^{p} |z|^{2(k-1)} \Re\left\{z h'_{p-k+1}\overline{\Phi}\right\} \geq \sum_{k=1}^{p} |z|^{2(k-1)} \Re\left\{z g'_{p-k+1}\Phi\right\}$$

для любого $z \in \mathbb{B}$.

В случае $p = 1$ мы получаем критерий полной α–достижимости для гармонических функций.

Следствие 3. *Пусть* $\Phi(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ *является гармонической функцией в* $\mathbb{B}$, $\Phi(0) = 0$, $J_\Phi(z) > 0$ *в* $\mathbb{B}$. *Тогда* Φ *вполне* α*–достижима,* $\alpha \in [0,1) \iff$ *для любого* $z \in \mathbb{B}$

$$|h(z)|^2 \cdot \Re\left\{\frac{zh'(z)}{h(z)}\right\} - |g(z)|^2 \cdot \Re\left\{\frac{zg'(z)}{g(z)}\right\} - \Re\left\{z(g'(z)h(z) - h'(z)g(z))\right\} \geq$$

$$\geq \sin\frac{\alpha\pi}{2}\sqrt{|z|^2(|h'|^2 + |g'|^2) - 2\Re\left\{h'(z)g'(z)z^2\right\}}\sqrt{|h(z)|^2 + |g(z)|^2 + 2\Re\left\{h(z)g(z)\right\}}.$$

Следствие 4. *В случае* $\alpha = 0$ *из следствия 3 мы получаем известное условие полной звездообразности для гармонических функций* [7]*:*

$$|h(z)|^2 \cdot \Re\left\{\frac{zh'(z)}{h(z)}\right\} \geq |g(z)|^2 \cdot \Re\left\{\frac{zg'(z)}{g(z)}\right\} + \Re\left\{z(g'(z)h(z) - h'(z)g(z))\right\}$$

для любого $z \in \mathbb{B}$.

Следствие 5. *Если в следствии 3 функция $\Phi(z)$ является аналитической в $\mathbb{B}$, то Φ вполне α–достижима, $\alpha \in [0,1) \Longleftrightarrow$ для любого $z \in \mathbb{B}$*

$$\Re\left\{\frac{z\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right\} \geq \sin\frac{\alpha\pi}{2}\left|\frac{z\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right|.$$

Последнее неравенство равносильно неравенству

$$\left|\arg\left(\frac{z\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right)\right| \leq \frac{\pi}{2}(1-\alpha). \tag{3}$$

Но это условие известно, так как $\Phi(\mathbb{B})$ является α–достижимой ($\alpha \in [0,1)$) $\Leftrightarrow$ Φ вполне α–достижима (см. [2]*), и $\Phi(\mathbb{B})$ α–достижима $\Leftrightarrow$ выполняется неравенство* (3) *(см.* [4] – [6]*).*

Следствие 6. *Если $\Phi(z)$ — аналитическая, то в случае $\alpha = 0$ из Следствия 2 мы получаем известное условие звездообразности:*

$$\Re\left\{\frac{z\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right\} \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{B}.$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01229).

Литература

1. *Математическая энциклопедия. Т. 2.* – М.: Сов. энцикл., 1979. – 552 с.

2. Liczberski P., Starkov V. V. *Domains in $\mathbb{R}^n$ with conical accessible boundary* // J. Math. Anal. Appl. – 2013. – V. 408. – № 2. – P. 547–560.

3. Амозова К. Ф. *Достаточные условия α–достижимости области в негладком случае* // Probl. Anal. Issues Anal. – 2013. – Т. 2(20). – № 1. – С. 3–11.

4. Stankiewicz J. *Quelques problèmes extrêmaux dans les classes des fonctions α–angulairement étoilées* // Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sectio A. – 1966. – V. XX. – P. 59–75.

5. Stankiewicz J. *Some remarks concerning starlike functions* // Bulletin de l'académie Polonaise des sciences. Série des sciences math., astr. et phys. – 1970. – V. XVIII. – № 3. – P. 143–146.

6. Brannan D. A., Kirwan W. E. *On some classes of bounded univalent functions* // J. London Math. Soc. – 1969. – V. 2. – № 1. – P. 431–443.

7. Chuaqui M., Duren P., Osgood B. *Curvature Properties of Planar Harmonic Mappings* // Computational Methods and Function Theory. – 2004. – V. 4. – № 1. – P. 127–142.

8. Балк М. Б. *Полианалитические функции и их обобщения* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундамент. направления. – 1991. – V. 85. – P. 187–246.

9. Amozova K. F. , Ganenkova E. G. , Ponnusamy S. *Criteria of univalence and fully α–accessibility for p–harmonic and p–analytic functions* // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2017. – V. 62. – № 8. – P. 1165–1183.

CRITERION OF FULLY α–ACCESSIBILITY FOR POLYHARMONIC FUNCTIONS

K.F. Amozova, E.G. Ganenkova, S. Ponnusamy

In this article, we present a new criterion of fully α–accessibility for polyharmonic functions, which, in

particular, produces a criterion of fully starlikeness for polyharmonic functions.
Keywords: polyharmonic function, fully α–accessible function, α–accessible domain, starlike domain.

УДК 517.546.1

ОБ ИНЪЕКТИВНОСТИ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ И ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К.Ф. Амозова[1], Е.Г. Ганенкова[2], С. Поннусами[3]

1 *amo-kira@rambler.ru*; Петрозаводский государственный университет
2 *g_ek@inbox.ru*; Петрозаводский государственный университет
3 *samy@isichennai.res.in*; Indian Statistical Institute, Chennai Centre SETS

В статье представлены новые критерии инъективности для полигармонических и полианалитических в круге функций.

Ключевые слова: однолистность, полигармоническая функция, полианалитическая функция.

Большое количество исследований, российских и зарубежных, посвящено условиям однолистности (инъективности) *аналитических* в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций. Одним из таких условий является следующий критерий однолистности И. Е. Базилевича в терминах коэффициентов аналитической функции.

Теорема A. [1] *Аналитическая в* $\mathbb{D}$ *функция* $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ *является однолистной тогда и только тогда, когда для каждого* $z \in \mathbb{D}$ *и каждого* $t \in [0, \pi/2]$ *справедливо*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\sin nt}{\sin t} z^{n-1} \neq 0, \quad \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)\Big|_{t=0} = n. \tag{1}$$

Для *гармонических* в $\mathbb{D}$ функций условий однолистности получено гораздо меньше (см., например, [2] и [3]).

В докладе будут представлены критерии однолистности для полигармонических и полианалитических в $\mathbb{D}$ функций, опубликованные авторами в [4], а также связанные с ними результаты.

Пусть $p \in \mathbb{N}$.

Определение. Комплекснозначная функция $F \in C^{2p}(\mathbb{D})$, называется p-гармонической (или полигармонической) в $\mathbb{D}$, если $\Delta^p F(z) = 0$ в $\mathbb{D}$, где Δ — оператор Лапласа.

Известно [5], что функция $F \in C^{2p}(\mathbb{D})$ является p–гармонической в $\mathbb{D}$ тогда и только тогда, когда F представима в виде

$$F(z) = \sum_{k=1}^{p} |z|^{2(k-1)} F_{p-k+1}(z),$$

где каждая функция $F_{p-k+1} = h_{p-k+1} + \overline{g}_{p-k+1}$, $k = 1, \dots, p$, является гармонической в $\mathbb{D}$. Без ограничения общности можно считать, что $h_{p-k+1}(0) = 0 = g_{p-k+1}(0)$. Напомним, что каждая гармоническая функция f в $\mathbb{D}$ может быть записана в виде $f = h + \overline{g}$,