УДК 519.642

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА

З.Х. Галимова[1]

1 *zulshik@mail.ru*; Казанский инновационный университет имени В.Г.Тимирясова (ИЭУП), Набережночелнинский филиал

Исследовано линейное интегральное уравнение второго рода с неподвижными особенностями в ядре. Для его приближенного решения предложен и обоснован обобщенный вариант метода коллокации.

Ключевые слова: интегральное уравнение, приближенное решение, метод коллокации, теоретическое обоснование.

Рассматривается линейное интегральное уравнение с неподвижными особенностями (УНО) в ядре

$$Ax \equiv x(t) + \int_0^1 K(t,s)[u(s)]^{-1}x(s)ds = y(t) \quad (t \in J \equiv [0,1]), \tag{1}$$

где $u(t) \equiv t^{p_1}(1-t)^{p_2}\prod_{j=1}^{q}(t-t_j)^{m_j}$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^+$, $t_j \in (0,1)$, $m_j \in \mathrm{N}\,(j=\overline{1,q})$; K и y – известные непрерывные функции, обладающие определенными свойствами "гладкости" точечного характера, x – искомая функция, а интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару. На базе рассуждений и результатов работ [1, 2] разработаны и обоснованы в смысле [3, гл.1] прямые проекционные методы, специально приспособленные к решению УНО (1) в общем случае, установлена их оптимальность по порядку точности. В виде иллюстрации приведем лишь некоторые результаты.

Пусть $X \equiv C\{p_1, p_2; \overline{m}, \overline{\tau}\} \equiv C^{\{p_1,p_2;\overline{m}\}}(J)$ – векторное пространство функций, представимых в виде

$$g(t) \equiv (u \cdot G)(t) + \sum_{j=1}^{q+2}\sum_{i=0}^{m_j-1} a_{ji}R_{ji}(t), \tag{2}$$

где $G \in G(J)$, $G(t_j) \equiv \lim_{t\to t_j} G(t) \quad (j=\overline{1,q+2})$, $t_j \in (0,1) \quad (j=\overline{1,q})$, $t_{q+1} \equiv 0$, $t_{q+2} \equiv 1$; $a_{ji} \in R$, а R_{ji} – фундаментальные полиномы Эрмита степени $m-1$ по узлам $\{t_j\}_1^{q+2}$. Здесь $m \equiv \sum_{j=1}^{q+2} m_j$, $m_{q+1} \equiv \lambda_1 + 1$, $m_{q+2} \equiv \lambda_2 + 1$, $\lambda_j \equiv \lambda(p_j) \quad (j=\overline{1,2})$, $\lambda(p) \equiv [p] - (1 + sign([p]-p))$ ($[\cdot]$ - целая часть). Введем "характеристический" оператор класса X :

$$(Tg)(t) \equiv \left[g(t) - \sum_{j=1}^{q+2}\sum_{i=0}^{m_j-1} g^{\{i\}}(t_j)R_{ji}(t)\right] / u(t) \quad (g \in X),$$

где $g^{\{i\}}(t_j)$ – соответствующие тейлоровские производные (см., напр., [2]). Ясно, что в (2) $G = Tg \in C$, $a_{ji} = g^{\{i\}}(t_j)$. По норме

$$\|g\|_X \equiv \|Tg\|_C + \sum_{j=1}^{q+2}\sum_{i=0}^{m_j-1} |g^{\{i\}}(t_j)|$$

пространство X полно и вложено в C.

Изучим оператор A в УНО (1), где ядро K удовлетворяет условиям

$$K \in C^{\{p_1,p_2;\overline{m}\}}(J^2);\ \varphi_{ji}(s) \equiv K_t^{\{i\}}(t_j,s),$$

$$\psi_{ji}(t) \equiv K_s^{\{i\}}(t,t_j) \in X\,(i=\overline{0,m_j-1},\ j=\overline{1,q+2}). \tag{3}$$

Теорема 1. *В условиях (3) оператор $A : X \to X$ фредгольмов.*

Схема доказательства такова. Предварительно показывается полная непрерывность оператора $K : X \to X$. Тогда утверждение теоремы непосредственно следует из того, что возмущение нетерова оператора вполне непрерывным сохраняет нетеровость и не меняет его индекса.

Пусть дано уравнение (1), в котором ядро K удовлетворяет требованиям (3), $y \in X$, а $x \in X$ – искомая функция. Приближенное решение УНО (1) образуем в виде

$$x_n \equiv x_n(t;\{c_i\}) \equiv u(t)\sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i + \sum_{i=0}^{m-1} c_{i+n} t^i, \quad (n \ge 2). \tag{4}$$

Неизвестные параметры $\{c_i\}_0^{n+m-1}$ найдем согласно обобщенному методу коллокации из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$(TAx_n - Ty)(\nu_k) = 0 \quad (k=\overline{1,n});\ (Ax_n - y)^{\{i\}}(t_j) = 0 \quad (i=\overline{0,m_j-1},\ j=\overline{1,q+2}), \tag{5}$$

где $\{\nu_k\}$ – система узлов Чебышева первого (или второго) рода.

Теорема 2. *Пусть $Ker A = \{\theta\}$ в X , а $h \equiv T_t T_s K$ (по t), $T\psi_{ji}$ $(i=\overline{0,m_j-1},\ j=\overline{1,q+2})$, $Ty \in DL(J)$. Тогда при всех $n \ge n_0 \in N$ СЛАУ (5) имеет единственное решение $\{c_i^*\}$ и последовательность приближенных решений $x_n^* \equiv x_n(t;\{c_i^*\})$ сходится к точному решению $x^* = A^{-1}y$ в пространстве X со скоростью*

$$\|x_n^* - x^*\| = O\left\{\left[E_{n-1}^t(h) + \sum_{j=1}^{q+2}\sum_{i=0}^{m_j-1} E_{n-1}(T\psi_{ji}) + E_{n-1}(Ty)\right]\ln n\right\},$$

где $E_l(q)$ – наилучшее равномерное приближение функции $g \in C$ полиномами степени не выше $l \ge 0$.

Рассмотрим теперь оптимизацию на классе однозначно разрешимых уравнений вида (1) в случае, когда исходные данные принадлежат семейству $C^{\{p_1,p_2;\overline{m}\}}H_\omega^r \equiv \{g \in C\{p_1,p_2;\overline{m},\overline{\tau}\} | Tg \in H_\omega^r\}$. Через $V_N(F)$ обозначим [3] оптимальную оценку погрешности всевозможных "полиномиальных" проекционных методов решения УНО (1) на классе F.

Теорема 3. *Если $F = C^{\{p_1,p_2;\overline{m}\}}H_\omega^r$, то*

$$V_N(F), \asymp N^{-r}\omega(N^{-1})\ln N \quad (N = n+m),$$

и этот оптимальный порядок реализует предложенный метод (4)-(5).

При доказательстве теорем 2, 3 существенно используются результаты работ [1, 3].

Литература

1. Габбасов Н. С. *Методы решения линейного интегрального уравнения с ядром, имеющим неподвижные особенности* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 5. – С. 12–20.

2. Габбасов Н. С. *К теории линейных интегральных уравнений третьего рода* // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32. – № 9. – С. 1192–1201.

3. Габдулхаев Б. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 232 с.

GENERALIZED COLLOCATION METHOD FOR A CLASS
OF INTEGRAL EQUATIONS OF THE SECOND KIND

Z.H. Galimova

We study a linear integral equation of the second kind with fixed singularities in the kernel. For its approximate solution we suggest and justify generalized variant of the collocation method.

Keywords: integral equation, approximate solution, collocation method, theoretical substantiation.

УДК 514.822

ОБОБЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА МАКАИ ДЛЯ ЖЕСТКОСТИ КРУЧЕНИЯ

Л.И. Гафиятуллина[1], Р.Г. Салахудинов[2]

1 *ligafiyatullina@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
2 *rustem.salakhudinov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В данной работе с использованием подходов из [3] доказывается обобщение неравенства Макаи для жесткости кручения в классе выпуклых областей.

Ключевые слова: жесткость кручения, моменты Евклида области относительно границы, изопериметрические неравенства, функция расстояния до границы области.

Ряд изопериметрических неравенств для жесткости кручения односвязных областей были получены Полиа и Сегё [2], Макаи [1], Пейном [4] и др.

Пусть G — выпуклая область на плоскости со спрямляемой границей и $\rho(z,G)$ — расстояние от точки z до границы ∂G области G. Пусть $\rho(G) = \sup_{z\in G}\rho(z,G)$.

Геометрический функционал, определяемый равенством

$$\mathrm{I}_p(G) := \iint\limits_{\Omega} \rho(z,G)^p \mathrm{dA},$$

называется моментом Евклида области G порядка p.

В 1962 г. Е. Макаи получил следующее неравенство

$$\mathrm{P}(G) \le 4\mathrm{I}_2(G),$$