

Литература

1. Эйзенхарт Л. П. *Риманова геометрия*. – М.: ИЛ, 1948. – 316 с.
2. Аминова А. В. *Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий* // УМН. – 1995. – Т. 50. – № 1. – С. 69–142.
3. Закирова З. Х. *Метрики 6-мерных h -пространств типов [3(21)], [(32)1], [(321)]* // Краткие сообщения по физике ФИАН. – 2011. – Т. 38. – № 9. – С. 270–274.
4. Закирова З. Х. *О некоторых специальных решениях уравнения Эйзенхарта* // Уфимский матем. журнал. – 2013. – Т. 5. – № 3. – С. 41–53.

THE GEOMETRY OF 6-DIMENSIONAL h -SPACE FOR [(33)] TYPE

Z.Kh. Zakirova

Study of geometric properties of higher-dimensional manifolds is a topical problem, which is theoretically important and has numerous applications. For instance, space-time symmetries give rise to energy, momentum and angular momentum conservation laws. In particular, the infinitesimal projective and affine transformations lead to fundamental conservation laws in field theory and classical mechanics that possess a form of quadratic first integrals of the geodesics equations. Interest to higher-dimensional manifolds is also due to advances in supersymmetric and supergravity theories. The point here is that the supersymmetry leads, in a sense, to increasing the dimension of the manifold. The aim of this paper is to investigate the 6-dimensional pseudo-Riemannian space $V^6(g_{ij})$ with signature $[+ + - - - -]$, which admits continuous transformation groups preserving geodesics. In this note we find the metric of h -space for [(33)] type and then determine the quadratic first integral of the geodesic equations for these h -space.

Keywords: differential geometry, pseudo-Riemannian manifolds, systems of partial differential equations.

УДК 517.544

СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ОСОБОМ СЛУЧАЕ

Н.Ю. Зонова¹, И.Г. Салехова²

¹ nina-zonova@yandex.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет, механико-математический институт

² jlysia.salekhova@ksu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет, механико-математический институт

Решено характеристическое сингулярное интегральное уравнение, когда контуром является объединение счетного числа периодически расположенных отрезков, а также в случае счетного множества отрезков, периодически расположенных в правой полуплоскости. Решение задачи получено путем сведения к соответствующей задаче Римана.

Ключевые слова: интегральное уравнение, задача Римана, однопериодическое расположение отрезков, однопериодическая функция, целая функция, мероморфная функция.

Сообщение посвящено решению характеристического сингулярного интегрального уравнения

$$a\varphi(t) + \frac{b}{\pi i} \int_L \frac{t\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\tau-t)} = f(t), \quad (1)$$

где $a, b - \text{const}$; $a, b \in \mathbb{C}$.

В первой части уравнение (1) рассматривается при условии, что $L = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} L_k$, где $L_0 = (a_0, b_0)$ лежит в вертикальной полосе $0 < \text{Re} z \leq 2\pi$, а L_k получены из L_0 преобразованиями однопериодической группы $z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Функция $f(t) \in H_\lambda(\bar{L}_0), f(t) = f(t + 2\pi), t \in \bar{L}_0$.

Требуется найти функцию $\varphi(t) \in h(b_k)$, удовлетворяющую условию $\varphi(t) = \varphi(t + 2\pi), t \in \bar{L}_0$. Под классом $h(b_k)$ понимается класс функций, гельдеровых вне окрестностей концов a_k, b_k дуги L_k и ограниченных в точках $b_k, k \in \mathbb{Z}$.

Поставленная задача равносильна решению уравнения

$$a\varphi(t) + \frac{b}{2\pi i} \int_{L_0} \varphi(\tau) \left(\text{ctg} \frac{\tau-t}{2} - \text{ctg} \frac{\tau}{2} \right) d\tau = f(t) \quad (2)$$

в классе периодических функций $\varphi(t) \in h(b_0)$.

Единственное решение уравнения (2) имеет вид:

$$\varphi(t) = \left[\frac{a}{a^2 - b^2} \right] f(t) - \left[\frac{b}{a^2 - b^2} \right] \frac{\chi_b^+(t)}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{f(\tau)d\tau}{\chi_b^+(\tau)} \left[\text{ctg} \frac{\tau-t}{2} - \text{ctg} \frac{\tau}{2} \right] d\tau,$$

где

$$\chi_b(z) = \left(\frac{\sin \frac{b_0-z}{2} \sin \frac{a_0}{2}}{\sin \frac{a_0-z}{2} \sin \frac{b_0}{2}} \right)^{\alpha + i\beta - [\alpha]},$$

$\alpha + i\beta = \frac{\ln G_0}{2\pi i}, G_0 = \frac{a-b}{a+b}, [\alpha] - \text{целая часть числа } \alpha$.

Решение было также получено в классах $h(a_0), h_0, h(a_0, b_0)$. В частности, в классе h_0 решение уравнения (2) имеет вид

$$\varphi(t) = \left[\frac{a}{a^2 - b^2} \right] f(t) - \left[\frac{b}{a^2 - b^2} \right] \frac{\chi_0^+(t)}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{f(\tau)d\tau}{\chi_0^+(\tau)} \left[\text{ctg} \frac{\tau-t}{2} - \text{ctg} \frac{\tau}{2} \right] d\tau + \frac{2b}{(a-b)} \psi(t) \chi_0^+(t),$$

где

$$\psi(z) = c_1(e^{iz} - 1), \chi_0(z) = \chi_b(z) \frac{1}{e^{iz} - e^{ib_0}}, c_1 = \text{const}.$$

Во второй части рассматривается решение уравнения (1) в случае, когда

$$f(t) \in H_\lambda(\bar{L}), \quad \sup_{t \in \bar{L}} |f(t)| \leq M < \infty.$$

Требуется найти функцию $\varphi(t) \in h(b_k)$, удовлетворяющую условию

$$\sup_{t \in \bar{L}} |\varphi(t)| \leq M_1 < \infty. \quad (3)$$

В этом случае искомая функция не является периодической, поэтому к задаче применяется подход, используемый в задачах для счетного множества контуров.

Единственное решение уравнения (1) в классе $h(b_k)$ имеет вид

$$\varphi(t) = \left[\frac{a}{a^2 - b^2} \right] f(t) - \left[\frac{b}{a^2 - b^2} \right] \frac{\chi_b^+(t)}{\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{L_k} \frac{t f(\tau) d\tau}{\chi_b^+(\tau) \tau (\tau - t)}$$

Решение было также получено в классах $h(a_k), h_0, h(a_k, b_k)$.

Третья часть посвящена решению уравнению (1) при условии, что $L = \bigcup_{k=0}^{\infty} L_k$, где $L_0 = (a_0, b_0)$ лежит в вертикальной полосе $0 \leq \operatorname{Re} z < 1$, а L_k получены из L_0 преобразованиями $z + k, k \in N$, причем функция $f(t)$ удовлетворяет условиям

$$f(t) \in H_\lambda(\bar{L}), f(\infty) = 0.$$

Функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (3).

В отличие от периодического расположения интервалов в данном случае каноническая функция соответствующей эквивалентной задачи Римана является непериодической. Однако в силу заданной закономерности расположения интервалов и постоянных коэффициентов, удается исследовать поведение канонической функции, которая выражается с помощью гамма-функции Эйлера.

Решение уравнения (1) получено в классах $h(b_k), h_0, h(a_k, b_k)$. В частности, единственное решение уравнения в классе $h(b_k)$ имеет вид

$$\varphi(t) = \left[\frac{a}{a^2 - b^2} \right] f(t) - \left[\frac{b}{a - b} \right] \frac{\chi_b^+(t)}{\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{L_k} \frac{t f(\tau) d\tau}{(a + b) \chi_b^+(\tau) \tau (\tau - t)},$$

$$\text{где } \chi_b(z) = \left[\frac{\Gamma(b_0) \Gamma(a_0 - z)}{\Gamma(a_0) \Gamma(b_0 - z)} \right]^{(\alpha + i\beta) - [\alpha]}$$

Литература

1. Чибрикова Л.И. *Основные граничные задачи для аналитических функций*. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1977. – 302 с.
2. Салехова И.Г. *Однородная задача Римана в случае счетного множества разомкнутых дуг* // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 6. – С. 124–135.
3. Вафина Л.И., Салехова И.Г. *Задача Шварца в случае счетного множества интервалов* // Изв. вузов. Математика. – 2016. – № 2. – С. 10–17.
4. Мухелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике*. – М.: Физматгиз, 1962. – 599 с.

SINGULAR INTEGRAL EQUATION IN A SPECIAL CASE

N.J. Zonova, J.G. Salekhova

A characteristic singular integral equation is solved when the contour is the union of a countable number of periodically located segments, and also in the case of a countable set of intervals periodically

located in the right half-plane. The solution of the problem is obtained by reducing to the corresponding Riemann problem.

Keywords: integral equation, Riemann boundary value problems, periodic arrangement of segments, periodic function, entire function, meromorphic function.

УДК 517.954

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ В-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Н.А. Ибрагимова¹, Е.А. Уткина²

¹ nai.liya@yandex.ru; Казанский государственный энергетический университет

² eutkina1@yandex.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В статье рассмотрены внутренняя и внешняя задачи Неймана для одного многомерного вырождающегося В-эллиптического уравнения с отрицательным параметром. Методом потенциалов доказана однозначная разрешимость поставленных краевых задач.

Ключевые слова: многомерное вырождающееся В-эллиптическое уравнение с отрицательным параметром, фундаментальное решение, краевая задача Неймана, метод потенциалов.

Пусть \mathbb{E}_p^{++} — часть p -мерного евклидова пространства, где $x_{p-1} > 0$, $x_p > 0$, D — конечная область в \mathbb{E}_p^{++} , ограниченная поверхностью Γ и частями Γ_0 и Γ_1 плоскостей $x_{p-1} = 0$, $x_p = 0$, соответственно, $C_{Bl}^k(D)$ — множество функций k раз непрерывно дифференцируемых в D и удовлетворяющих условию $\frac{\partial u}{\partial x_l} = o(1)$ при $x_l \rightarrow 0$. Используются обозначения: $x = (x', x_p)$, $x' = (x'', x_{p-1})$, $x'' = (x_1, x_2, \dots, x_{p-2})$ — точки евклидова пространства, $D_e = \mathbb{E}_p^{++} \setminus \bar{D}$.

В настоящей работе для вырождающегося В-эллиптического уравнения

$$M_B[u] = x_p^m \left(\Delta_{x'} u + B_{x_{p-1}} u \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_p^2} - \lambda^2 x_p^m u = 0, \quad (1)$$

в котором $\Delta_{x'} = \sum_{l=1}^{p-2} \frac{\partial^2}{\partial x_l^2}$ — лапласиан, $B_{x_{p-1}} = \frac{\partial^2}{\partial x_{p-1}^2} + \frac{k}{x_{p-1}} \frac{\partial}{\partial x_{p-1}}$ — оператор Бесселя, $m > 0$, $k > 0$, $p \geq 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, изучены следующие краевые задачи:

Внутренняя краевая задача Неймана. Найти в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(x) &\in C_{B^{p-1}}^2(D) \cap C_{B^p}^2(D) \cap C^1(\bar{D}), \\ u(x) &= o(1) \quad \text{при} \quad x_p \rightarrow 0, \\ A[u]|_{\Gamma} &= g(\xi), \quad g(\xi) \in C(\Gamma), \end{aligned} \quad (2)$$

где $A[u] = \xi_p^m \sum_{l=1}^{p-1} \cos(n, \xi_l) \frac{\partial u}{\partial \xi_l} + \cos(n, \xi_p) \frac{\partial u}{\partial \xi_p}$ — кономальная производная.