В докладе обсуждаются некоторые близкие вопросы. Приводятся примеры нахождения ранга конкретных тензоров, в частности, для элементов тензорных пространств, участвующих в построениях стандартных комплексов гомологической теории (см., напр., [2]). При этом нами используются результаты статей [3] – [5]. В одном из примеров рассматривается стандартная проективная резольвента для банаховой алгебры Берлинга, состоящей из суммируемых последовательностей, со свёрткой в качестве умножения. При этом она рассматривается как модуль над собой с естественным левым действием.

Литература

1. Grothendieck A. *Produits tensorielles topologiques et espaces nuclearies.* // Mem. Amer. Math. Soc. – 1955. – № 16.

2. Хелемский А. Я. *Гомология в банаховых и топологических алгебрах.* – М.: Изд-во МГУ, 1986. – 288 с.

3. Гумеров Р. Н. *Гомологическая размерность радикальных алгебр типа Бёрлинга с быстро убывающим весом* // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. – 1988. – № 5. – С. 18–22.

4. Гумеров Р. Н. *Об одном геометрическом признаке нетривиальности симплициальных и циклических когомологий банаховых алгебр* // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. – 1991. – № 3. – С. 67–69.

5. Gumerov R. N., Vidunov S. I. *Approximation by matrices with simple spectra* // Lobachevskii J. Math. – 2016. – V. 37. – № 3. – P. 240–243.

ON TENSORS IN HOMOLOGICAL COMPLEXES

R.N. Gumerov

The report is concerned with properties and characteristics of tensors in spaces of standard (co)homological complexes. In particular, we evaluate tensor ranks of elements in the standard resolution for the module consisting of summable sequences.

Keywords: complex, module, standard complex, standard resolution, tensor, tensor product, tensor rank.

УДК 517.95

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЕЗИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА - БИЦАДЗЕ

В.А. Гущина[1]

1 *violetta.novikova.1991@mail.ru*; Самарский государственный социально-педагогический университет

В данной работе для уравнения Лаврентьева-Бицадзе рассматривается нелокальная задача Дезина в прямоугольной области. Решение задачи построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. При некоторых условиях относительно параметров и заданных фунций доказана сходимость построенного ряда в классе регулярных решений и установлена устойчивость решения от заданных граничных функций.

Ключевые слова: нелокальная задача Дезина, уравнение Лаврентьева-Бицадзе,

единственность, существование, ряд, малые знаменатели, сходимость, устойчивость.

Рассмотрим уравнение Лаврентьева-Бицадзе

$$Lu \equiv u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)\, u_{yy} = 0 \tag{1}$$

в прямоугольной области

$$D = \{(x, y) | 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\},$$

где $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — заданные действительные числа, и поставим следующую нелокальную задачу.

Задача Дезина. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+); \tag{2}$$

$$Lu \equiv 0, (x, y) \in D_- \cup D_+; \tag{3}$$

$$u(0, y) = u(l, y), \quad u_x(0, y) - u_x(l, y) = 0, \ -\alpha \le y \le \beta; \tag{4}$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), \ 0 \le x \le l; \tag{5}$$

$$u_y(x, -\alpha) - \lambda u(x, 0) = \psi(x), \ 0 \le x \le l, \tag{6}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, λ – заданный действительный параметр.

А.А. Дезин [1] отметил, что метод поиска разрешимых расширений для дифференциальных операторов может быть адаптирован к оператору Лаврентьева-Бицадзе с условиями периодичности по переменной x. З.А. Нахушевой [2] задача (2) – (6) изучена, когда $\alpha = l$, $\varphi(x) = \psi(x) = 0$, $F(x, y) = f(x, y) \cdot H(y)$, $H(y)$ – функция Хевисайда, $\lambda \ge 0$. Показано, что при $\lambda < 0$ однородная задача (т. е. когда $f(x, y) \equiv 0$) имеет нетривиальные решения.

В работах [3, 4] решение данной задачи построено в виде суммы ряда

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{l}} u_0(y) + \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(y) \cos \mu_n x + v_n(y) \sin \mu_n x, \tag{7}$$

где коэффициенты $u_n(y)$, $u_0(y)$, и $v_n(y)$ определяются соответственно формулами:

$$u_n(y) = \begin{cases} \varphi_n \dfrac{A_n(\alpha, y)}{\Delta(n)} - \psi_n \dfrac{\operatorname{sh} \mu_n(\beta - y)}{\Delta(n)}, & y > 0, \\ \varphi_n \dfrac{B_n(\alpha, y)}{\Delta(n)} + \psi_n \dfrac{C_n(y, \beta)}{\Delta(n)}, & y < 0, \end{cases}$$

при условии, что при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\Delta(n) = \cos \mu_n \alpha \operatorname{ch} \mu_n \beta - \operatorname{sh} \mu_n \beta \sin \mu_n \alpha + \frac{\lambda}{\mu_n} \operatorname{sh} \mu_n \beta \ne 0,$$

где

$$A_n(\alpha, y) = \cos\mu_n\alpha \operatorname{ch}\mu_n y - \sin\mu_n\alpha \operatorname{sh}\mu_n y + \frac{\lambda}{\mu_n}\operatorname{sh}\mu_n y,$$

$$B_n(\alpha, y) = \cos\mu_n(\alpha + y) + \frac{\lambda}{\mu_n}\sin\mu_n y,\ C_n(y,\beta) = \operatorname{ch}\mu_n\beta \sin\mu_n y - \operatorname{sh}\mu_n\beta\cos\mu_n y.$$

$$u_0(y) = \varphi_0\frac{1+\lambda y}{1+\lambda\beta} + \psi_0\frac{y-\beta}{1+\lambda\beta}, \quad -\alpha \le y \le \beta,$$

$$1+\lambda\beta \ne 0, \quad \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{l}}\int_0^l \varphi(x)dx, \quad \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{l}}\int_0^l \psi(x)dx$$

$$v_n(y) = \begin{cases} \widetilde{\varphi}_n\dfrac{A_n(\alpha, y)}{\Delta(n)} - \widetilde{\psi}_n\dfrac{\operatorname{sh}\mu_n(\beta - y)}{\Delta(n)}, & y > 0, \\ \widetilde{\varphi}_n\dfrac{B_n(\alpha, y)}{\Delta(n)} + \widetilde{\psi}_n\dfrac{C_n(y,\beta)}{\Delta(n)}, & y < 0, \end{cases}$$

$$\widetilde{\varphi}_n = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \varphi(x)\sin\mu_n x dx, \quad \widetilde{\psi}_n = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \psi(x)\sin\mu_n x dx,$$

и доказаны теоремы существования и единственности задачи (2) – (6).

В данной работе установим устойчивость решения этой задачи относительно граничных функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$. Для этого приведем вспомогательные утверждения из [3, 4].

Лемма 1. *Если $\tilde{\alpha} = \alpha/l$ является натуральным числом и $\lambda > -2\pi/l$, то существует положительная постоянная C_0, зависящая от λ и l, такая что при всех $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$|\Delta(n)| \ge e^{\mu_n\beta}C_0 > 0.$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$ и любом $y \in [-\alpha, \beta]$ справедливы оценки*

$$|u_n(y)| \le M_1(|\varphi_n| + |\psi_n|), \quad \left|u_n'(y)\right| \le M_2 n(|\varphi_n| + |\psi_n|);$$

$$\left|u_n''(y)\right| \le M_3 n^2(|\varphi_n| + |\psi_n|), \quad y \ge 0, \quad \left|u_n''(y)\right| \le M_4 n^2(|\varphi_n| + |\psi_n|), \quad y \le 0;$$

$$|v_n(y)| \le M_1\left(|\tilde{\varphi}_n| + |\tilde{\psi}_n|\right), \quad \left|v_n'(y)\right| \le M_2 n(|\tilde{\varphi}_n| + |\tilde{\psi}_n|),$$

$$\left|v_n''(y)\right| \le M_3 n^2(|\tilde{\varphi}_n| + |\tilde{\psi}_n|), \quad y \ge 0, \quad \left|v_n''(y)\right| \le M_4 n^2(|\tilde{\varphi}_n| + |\tilde{\psi}_n|), \quad y \le 0;$$

где M_i – положительные постоянные.

Лемма 3. *Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^3[0,l]$ и $\varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(l)$, $\psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(l)$, $i = 0,1,2$. Тогда справедливы представления:*

$$\varphi_n = \frac{1}{\mu_n^3}\varphi_n^{(3)}, \quad \psi_n = \frac{1}{\mu_n^3}\psi_n^{(3)}, \quad \widetilde{\varphi}_n = -\frac{1}{\mu_n^3}\widetilde{\varphi}_n^{(3)}, \quad \widetilde{\psi}_n = -\frac{1}{\mu_n^3}\widetilde{\psi}_n^{(3)},$$

где

$$\varphi_n^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^1 \varphi^{(3)}(x)\sin\mu_n x dx, \quad \psi_n^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^1 \psi^{(3)}(x)\sin\mu_n x dx,$$

$$\widetilde{\varphi}_n^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^1 \widetilde{\varphi}^{(3)}(x) \cos \mu_n x dx, \quad \widetilde{\psi}_n^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^1 \widetilde{\psi}^{(3)}(x) \cos \mu_n x dx,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\varphi_n^{(3)}\right|^2 \le \left\|\varphi^{(3)}(x)\right\|_{L_2}^2, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\psi_n^{(3)}\right|^2 \le \left\|\psi^{(3)}(x)\right\|_{L_2}^2,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\widetilde{\varphi}_n^{(3)}\right|^2 \le \left\|\varphi^{(3)}(x)\right\|_{L_2}^2, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\widetilde{\psi}_n^{(3)}\right|^2 \le \left\|\psi^{(3)}(x)\right\|_{L_2}^2.$$

На основании лемм 1 – 3 доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Если выполнены условия лемм 1 и 3, то существует единственное решение задачи* (2) – (6) *и это решение определяется рядом* (7).

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1. Тогда для решения* (7) *задачи* (2) – (6) *имеют место оценки:*

$$\|u(x,y)\|_{L_2} \le M_5 \left(\|\varphi(x)\|_{L_2} + \|\psi(x)\|_{L_2}\right), \tag{8}$$

$$\|u(x,y)\|_{C(\bar{D})} \le M_6 \left(\|\varphi(x)\|_{C_{[0,l]}} + \|\psi(x)\|_{C_{[0,l]}} + \|\varphi'(x)\|_{C_{[0,l]}} + \|\psi'(x)\|_{C_{[0,l]}}\right), \tag{9}$$

где постоянные M_5 и M_6 не зависят от функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Доказательство проведем, следуя работе [5]. Поскольку система $X_n(x)$ ортонормирована в пространстве $L_2[0,l]$, то из формулы (7) в силу леммы 2 получим

$$\begin{aligned}
\|u(x,y)\|_{L_2}^2 = u_0^2(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2(y) + v_n^2(y) \le 2\widetilde{M}_1^2 \left(\varphi_0^2 + \psi_0^2\right) + \\
+ 2M_1^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|\varphi_n|^2 + |\psi_n|^2 + |\tilde{\varphi}_n|^2 + |\tilde{\psi}_n|^2\right) \le \\
\le M_5^2 \left(\varphi_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n^2 + \tilde{\varphi}_n^2 + \psi_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n^2 + \tilde{\psi}_n^2\right) \le \\
\le M_5^2 \left(\|\varphi(x)\|_{L_2}^2 + \|\psi(x)\|_{L_2}^2\right).
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает справедливость оценки (8). Пусть (x,y) — произвольная точка из $\overline{D}$. Тогда на основании леммы 2 имеем

$$\begin{aligned}
|u(x,y)| \le |u_0(y)| + M_1 \sum_{n=1}^{+\infty} |u_k(y)| + |v_n(y)| \le \\
\le \widetilde{M}_1 (|\varphi_0| + |\psi_0|) + M_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|\varphi_n| + |\psi_n| + |\tilde{\varphi}_n| + |\tilde{\psi}_n|\right).
\end{aligned} \tag{10}$$

По условию φ_n, $\tilde{\varphi}_n$, ψ_n и $\tilde{\psi}_n$ можно представить в следующем виде:

$$\varphi_n = -\frac{\varphi_n^{(1)}}{\mu_n}, \quad \tilde{\varphi}_n = -\frac{\tilde{\varphi}_n^{(1)}}{\mu_n}, \quad \psi_n = -\frac{\psi_n^{(1)}}{\mu_n}, \quad \tilde{\psi}_n = -\frac{\tilde{\psi}_n^{(1)}}{\mu_n}, \tag{11}$$

где

$$\varphi_n^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \varphi'(x)\sin\mu_n x dx, \quad \tilde{\varphi}_n^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \varphi'(x)\cos\mu_n x dx,$$

$$\psi_n^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \psi'(x)\sin\mu_n x dx, \quad \tilde{\varphi}_n^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \psi'(x)\cos\mu_n x dx.$$

С учетом представлений (11) из оценки (10) на основании неравенства Коши—Буняковского, получим

$$|u(x,y)| \le \widetilde{M}_1(|\varphi_0| + |\psi_0|) + M_1\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\mu_n}\left(\left|\varphi_n^{(1)}\right| + \left|\tilde{\varphi}_n^{(1)}\right| + \left|\psi_n^{(1)}\right| + \left|\tilde{\psi}_n^{(1)}\right|\right) \le$$

$$\le \widetilde{M}_1(|\varphi_0| + |\psi_0|) + M_1\frac{l}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n_2}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left[\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\varphi_n^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\tilde{\varphi}_n^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\psi_n^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\tilde{\psi}_n^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \le$$

$$\le \widetilde{M}_2\left[\|\varphi(x)\|_{L_2} + \|\psi(x)\|_{L_2} + \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\varphi_n^{(1)}\right|^2 + \left|\tilde{\varphi}_n^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} +\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\psi_n^{(1)}\right|^2 + \left|\tilde{\psi}_n^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \le \widetilde{M}_2\left[\|\varphi(x)\|_{L_2} + \|\psi(x)\|_{L_2} + \left(\left|\varphi_0^{(1)}\right|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\varphi_n^{(1)}\right|^2 + \left|\tilde{\varphi}_n^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} +\right.$$

$$\left.+\left(\left|\psi_0^{(1)}\right|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\psi_n^{(1)}\right|^2 + \left|\tilde{\psi}_k^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \le$$

$$\le \widetilde{M}_3\left(\|\varphi(x)\|_{L_2} + \|\psi(x)\|_{L_2} + \|\varphi'(x)\|_{L_2} + \|\psi'(x)\|_{L_2}\right),$$

где

$$\varphi_0^{(1)} = \sqrt{\frac{1}{l}}\int_0^l \varphi'(x)dx = 0, \; \psi_0^{(1)} = \sqrt{\frac{1}{l}}\int_0^l \psi'(x)dx = 0.$$

Отсюда с учетом неравенства

$$||\varphi||_{L_2} = \left(\int_0^l \varphi^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_0^l \left(max_{0\le x\le l}|\varphi(x)|\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \max_{0\le x\le l}|\varphi(x)|\sqrt{l} = \sqrt{l}||\varphi||_{C_{[0,l]}}$$

следует оценка (9).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект проект № 16-31-00421).

Литература

1. Dezin A. A. *On the solvable extensions of partial differential operators*. – Outlines of the Joint Soviet-American Symposium on PDE, 1963, Novosibirsk. – С. 65–66.

2. Нахушева З. А. *Об одной нелокальной задаче А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева-Бицадзе* / А.М. Нахушева // Дифф. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1199–2003.

3. Сабитов К. Б., Новикова В. А. *Нелокальная задача А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева-Бицадзе* // Изв. вузов. Математика. – 2016. – № 6. – С. 61–72.

4. Сабитов К. Б., Гущина (Новикова) В. А. *Задача А.А. Дезина для неоднородного уравнения Лаврентьева-Бицадзе* // Сиб. матем. журн. – 2017. – № 3. – С. 37–50.

5. Сабитов К.Б. *Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием* // Дифференциальные уравнения. – 2010. – № 10. – С. 1468–1478.

STABILITY OF THE SOLUTION OF THE DESIN PROBLEM
FOR THE LAVRENTIEV - BITSADZE EQUATION

V.A. Gushchina

For the homogeneous Lavrentiev-Bitsadze equation it is considered a nonlocal problem in a rectangular region. The solution of the problem is constructed as the sum of a series in eigenfunctions of the corresponding one-dimensional spectral problems. Under certain conditions on the parameters and given functions, we prove the convergence of the constructed series in the class of regular solutions and stability of the solution from the given boundary functions.

Keywords: under perturbation of nonlocal Dezin problem, the Lavrentiev-Bitsadze equation, uniqueness, existence of solution, small denominators, convergence, stability.

УДК 517.53

ВЫДЕЛЕНИЕ ПАР ГАРМОНИК ИЗ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВЫМ ОПЕРАТОРОМ

В.И. Данченко[1], Д.Я. Данченко[2]

1 *vdanch2012@yandex.ru*; Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых
2 *ddanchenko@vlsu.ru*; Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых

Предлагается метод выделения из тригонометрических многочленов $T_n(t)$ сумм двух гармоник с заданными номерами методом амплитудно-фазовых преобразований. Такие преобразования переводят многочлены $T_n(t)$ в подобные им, совершая две простейшие операции — умножение на вещественную константу X и сдвиг на вещественную фазу λ, т.е. $T_n(t) \mapsto X \cdot T_n(t-\lambda)$. Гармоники выделяются амплитудно-фазовым оператором, представляющим собой сложение подобных многочленов.

Ключевые слова: амплитудно-фазовый оператор, оценки гармоник.

Действие амплитудно-фазового оператора (АФО) порядка не выше m на тригонометрический многочлен

$$T_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \tau_k(t), \qquad \tau_k(t) := a_k \cos kt + b_k \sin kt, \qquad n \in \mathbb{N},$$