Литература

1. Folland G., Sitaram A. *The uncertainty principle: a mathematical survey* // J. Fourier Anal. Appl. – 1997. – № 3. – P. 207-238.

2. Beckner W. *Pitt's inequality and the uncertainty principle* // Proc. Amer Math. Soc. – 1995. – № 123. – P. 1897-1905.

INTEGRAL INEQUALITIES RELATED TO UNCERTAINTY PRINCIPLE OF HEISENBERG

R.V. Makarov

We describe the classical Heisenberg inequality and its modifications. Also we obtain some new similar estimates and inequalities.

Keywords: uncertainty principle, integral inequality.

УДК 517.95

О ВЗАИМОСВЯЗИ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Е.А. Мазепа[1]

1 *elena.mazepa@volsu.ru*; Волгоградский государственный университет

В данной работе, используя достаточно новый подход к постановке краевых задач на произвольном некомпактном римановом многообразии M, основанный на введении классов эквивалентных на M функций, устанавливаем зависимость между разрешимостью краевых и внешних краевых задач для уравнения Пуассона на M в классе неограниченных непрерывных функций.

Ключевые слова: уравнение Пуассона, краевая и внешняя краевая задачи, некомпактные римановы многообразия, задача Дирихле.

В последние годы опубликовано большое количество работ, посвященных вопросам разрешимости различных краевых задач для гармонических функций, для решений стационарного уравнения Шредингера, для некоторых других однородных линейных и квазилинейных эллиптических уравнений. При этом исследования неоднородных эллиптических уравнений носят единичный характер и посвящены преимущественно изучению асимптотического поведения решений этих уравнений [1]- [2], а не вопросам разрешимости для них краевых задач.

В настоящей работе предлагаем, используя достаточно новый подход к постановке краевых задач на некомпактных римановых многообразиях, основанный на введении понятия классов эквивалентных на многообразии M непрерывных функций (в том числе неограниченных), исследовать вопросы разрешимости краевых и внешних краевых задач для уравнения Пуассона

$$\Delta u = g(x), \tag{1}$$

где функция $g(x) \in C^{\gamma}(\Omega)$ для любого подмножества $\Omega \subset\subset M$, $0 < \gamma < 1$.

В частности, в работе устанавливается зависимость между разрешимостью краевых и внешних краевых задач для уравнения (1) на произвольном некомпактном римановом многообразии.

Под решением уравнения (1) на многообразии M будем понимать функцию $u \in C^2(\Omega)$, удовлетворяющую этому уравнению на любом компактном подмножестве $\Omega \subset M$.

Ранее описываемый ниже подход был использован для изучения вопросов разрешимости краевых задач для уравнений Лапласа-Бельтрами, уравнения Шредингера, ряда полулинейных и квазилинейных эллиптических уравнений на произвольных некомпактных римановых многообразиях (см., напр., [3]– [5]).

Пусть $B \subset M$ — произвольное связное компактное подмножество с гладкой границей ∂B и непустой внутренностью, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия M, то есть последовательность предкомпактных открытых подмножеств риманова многообразия M таких, что $\overline{B}_k \subset B_{k+1}$, $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$.

Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — произвольные непрерывные (в том числе, неограниченные) на M функции.

Определение 1. Будем говорить, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *эквивалентны на* M (и обозначать $f_1(x) \sim f_2(x)$), если для некоторого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M выполнено

$$\lim_{k\to\infty} ||f_1(x) - f_2(x)||_{C^0(M\setminus B_k)} = 0,$$

где $||f(x)||_{C^0(G)} = \sup_G |f(x)|$.

Обозначим класс эквивалентных f функций через $[f]$. Введенное отношение действительно является отношением эквивалентности (т. е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно), не зависит от выбора исчерпания многообразия M и характеризует поведение функций вне произвольного компактного подмножества $B \subset M$ (см., напр., [3]– [5]).

Определение 2. Будем называть функцию f *асимптотически неотрицательной на* M (и обозначать $f \gtrsim 0$), если на M существует непрерывная функция $w \geq 0$ такая, что $w \sim f$.

Определение 3. Будем говорить, что функция g *асимптотически не превосходит функцию* f на M (и обозначать $g \lesssim f$), если разность $f - g$ на M является асимптотически неотрицательной функцией.

Имеют место следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Если $g \lesssim f$ и $f \lesssim g$ на M, то $g \sim f$ на M. Обратное утверждение также верно.*

Лемма 2 (Принцип сравнения 1). *Пусть $\Delta v \leq \Delta u$ на $M \setminus B$, $v|_{\partial B} \geq u|_{\partial B}$, $v \sim u$. Тогда $v \geq u$ на $M \setminus B$.*

Пусть $\Delta v \leq \Delta u$ на M и $v \sim u$. Тогда $v \geq u$ на M.

Лемма 3 (Принцип сравнения 2). *Пусть $\Delta v \leq \Delta u$ на $M \setminus B$, $v|_{\partial B} \geq u|_{\partial B}$, $v \gtrsim u$. Тогда $v \geq u$ на $M \setminus B$.*

Пусть $\Delta v \leq \Delta u$ на M и $v \gtrsim u$. Тогда $v \geq u$ на M.

Определение 4. Будем говорить, что на M *разрешима краевая задача для уравнения* (1) *с граничными условиями из класса* $[f]$, если на M существует решение $u(x)$ уравнения (1) такое, что $u \in [f]$.

Определение 5. Пусть $\Phi(x) \in C(\partial B)$ — произвольная функция. Будем говорить, что на $M \setminus B$ *разрешима внешняя краевая задача для уравнения* (1) *с граничными условиями* $(\Phi, [f])$, если на $M \setminus B$ существует решение $u(x)$ уравнения (1) такое, что $u \in [f]$ и $u|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$.

Сформулируем теорему единственности решения краевых и внешних краевых задач для уравнения (1) в заданном классе эквивалентных функций.

Теорема 1 (Теорема единственности). *Пусть* $\Delta v = g(x)$ *и* $\Delta u = g(x)$ *на* $M \setminus B$ *и* $v|_{\partial B} = u|_{\partial B}$, $v \sim u$. *Тогда* $w = u$ *на* $M \setminus B$.
Пусть $\Delta v = g(x)$, $\Delta u = g(x)$ *на* M *и* $v \sim u$. *Тогда* $v = u$ *на* M.

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из принципов сравнения 1 и 2.

Далее пусть $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия M с гладкими границами ∂B_k. Обозначим через v_k — гармоническая в $B_k \setminus B$ функция, удовлетворяющее условиям

$$v_k|_{\partial B} = 1, \qquad v_k|_{\partial B_k} = 0.$$

Как и в [3] легко показать, что при $k \to \infty$ она монотонно возрастает и сходится к гармонической на $M \setminus B$ функции такой, что

$$v = \lim_{k\to\infty} v_k, \qquad 0 < v \leq 1, \qquad v|_{\partial B} = 1.$$

Заметим также, что функция v не зависит от выбора исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ и для уравнения Лапласа-Бельтрами функция v есть не что иное, как емкостный потенциал компакта B относительно многообразия M (см. [6]).

Определение 6. Многообразие M будем называть Δ-*строгим* многообразием, если для некоторого компакта $G \subset M$ существует емкостный потенциал v такой, что $v \in [0]$.

Следующие утверждения в некоторой степени обобщают для уравнения Пуассона результаты, полученные ранее для однородных линейных уравнений на произвольном некомпактном римановом многообразии M.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 2. *Пусть на* $M \setminus B$ *для любой константы* À *разрешима внешняя краевая задача для уравнения* (1) *с граничными условиями* $(A, [f])$. *Тогда на* M *для уравнения* (1) *разрешима краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]$.

Следствие. *Пусть на* $M \setminus B$ *для произвольной непрерывной на* ∂B *функции* $\Phi(x)$ *разрешима внешняя краевая задача для уравнения* (1) *с граничными условиями* $(\Phi, [f])$. *Тогда на* M *для уравнения* (1) *разрешима краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]$.

Теорема 3. *Пусть на* Δ-*строгом многообразии* M *разрешима краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]$. *Тогда на* $M \setminus B$ *для произвольной непрерывной на* ∂B

функции $\Phi(x)$ *разрешима внешняя краевая задача для уравнения* (1) *с граничными условиями* $(\Phi, [f])$.

Доказательство вспомогательных и основных представленных выше результатов работы опирается на классические утверждения теории уравнений в частных производных: принцип максимума, теоремы сравнения и единственности для решений линейных эллиптических дифференциальных уравнений. Их справедливость на предкомпактных подмножествах многообразия M доказывается так же как и для ограниченных областей в R^n.

Замечание. Представленные результаты обобщают аналогичные утверждения, полученные ранее для классов $[f]$ ограниченных непрерывных функций (см. [7]).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 15-41-02479 р_поволжье_а).

Литература

1. Ni L., Shi Y., Tam L.-F. *Poisson equation, Poincare-Lelong equation and curvature decay on complete Kahler manifolds* // J. Diff. Geom. – 2001. – V. 57. – P. 733-388.

2. Grigor'ya A. A., Verbitsky I.*Pointwise estimates of solutions to semilinear elliptic equations and inequalities* // arXiv: 1511.03188v1. – 2015. – P. 1-32.

3. Мазепа Е. А. *Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера на римановых многообразиях* // Сиб. матем. журн. – 2002. – Т. 43. – № 3. – С. 591–599.

4. Losev A. G., Mazepa E. A., Chebanenko V. Y. *Unbounded solutions of the stationary Schrodinger equation on Riemannian manifolds* // CMFT. – 2003. – V. 3. – № 2. – P. 443-451.

5. Корольков С. А., Лосев А. Г. *Решения эллиптических уравнений на римановых многообразиях с концами* // Вест. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1. Математика. Физика. – 2011. – № 1. – С. 23–40.

6. Grigor'yan A. *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds* // Bulletin of Amer. Math. Soc. – 1999. – № 36. – P. 135-249.

7. Мазепа Е. А. *О разрешимости краевых задач для уравнения Пуассона на некомпактных римановых многообразиях* // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2017. – Т. 20. – № 3. – С. 135–145.

ON INTERRELATION BETWEEN SOLVABILITY OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE POISSON EQUATION ON NONCOMPACT RIEMANNIAN MANIFOLDS

E.A. Mazepa

We study questions of existence and belonging to a given functional class of bounded and unbounded solutions of the Poisson equation on a noncompact Riemannian manifold M without boundary. Of keen interest is the interrelation between problems of existence of solutions of the Poisson equation on M and off some compact $B \subset M$ with the same growth "at infinity". In our research we use a new approach which is based on consideration of equivalence classes of functions on M.

Keywords: Poisson equation, boundary value problem, noncompact Riemannian manifolds, the Dirichlet problem.