УДК 517.948

МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ

М.Г. Ахмадиев[1]

1 *bulat–007@mail.ru*; Казанский научно–исследовательский технологический университет

В работе для численного решения сингулярного интегро–дифференциального уравнения задачи дифракции используется метод механических квадратур. Доказано, что этот метод устойчив относительно малых возмущений элементов аппроксимирующих уравнений.

Ключевые слова: приближенные методы, задача дифракции, метод механических квадратур, сингулярные интегро–дифференциальные уравнения, аппроксимирующие уравнения, операторные уравнения.

В работах [1]–[6] рассмотрены прямые методы решения следующего уравнения теории крыла, которая имеет приложения в ряде прикладных задач, например, в задачах аэродинамики, теории упругости, фильтрации, управления и др.:

$$B(t)\Gamma(t)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma'(\tau)}{\tau-t}dt=f(t)\ \ (-1<t<1),$$

при условиях $\Gamma(-1)=\Gamma(1)=0$.

В работе [2] отмечено, что аналогичные результаты могут быть получены и для уравнений вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma'(\tau)}{\tau-t}dt+(T\Gamma)(t)=f(t)\ \ (-1<t<1),$$

где T – вполне непрерывный оператор.

Следуя указанным выше работам, рассмотрим сингулярное интегро–дифференциальное уравнение, встречающееся в задачах дифракции [7]–[8]

$$\frac{d}{dt}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}dt+\int_{-1}^{1}\frac{h(t,\tau)}{|\tau-t|^{\lambda}}\varphi(\tau)d\tau=f(t)\ \ (-1<t<1), \tag{1}$$

при условиях

$$\varphi(-1)=\varphi(1)=0, \tag{2}$$

где $h(t,\tau)$, $f(t)$ – известные функции, $\varphi(t)$ – искомая функция, $\lambda\,(0\le\lambda<1)$ – числовой параметр, а сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

В этой работе для численного решения задачи (1)–(2) применяется метод механических квадратур; это является непосредственным продолжением работы [9], где поставленная задача решена полиномиальными методами. Теоретическое обоснование метода механических квадратур проводится с помощью одного из вариантов общей теории приближённых методов анализа [10] и результатов теории приближения функций.

Известно [1], что решение задачи (1)–(2) представляется в виде

$$\varphi(\tau) = \sqrt{1-\tau^2}\varphi_0(\tau),$$

где $\varphi_0(\tau)$ – ограниченная функция.

Приближённое решение задачи (1)–(2) ищем в виде (см. например, [1] или [8])

$$\varphi_n(\tau) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\widetilde{\varphi}(\tau_k)\frac{\sqrt{1-\tau^2}U_n(\tau)\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-\tau_k} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\widetilde{\varphi}(\tau_k)\sum_{m=1}^{n}\frac{T_{m-1}(\tau)-T_{m+1}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\sin(m\nu_k),$$

где $\nu_k = \frac{k\pi}{n+1}$, $\tau_k = \cos\nu_k$, а $T_k(\tau)$ и $U_k(\tau)$ – полиномы Чебышева первого и второго рода, соответственно. Следуя работам [1], [3] и [8], используя при этом свойства полиномов Чебышева, находим

$$\frac{d}{dt}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_n(\tau)}{\tau-t}d\tau = -\frac{2\pi}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\widetilde{\varphi}(\tau_k)\sum_{k=1}^{n}mU_{m-1}(t)\sin(m\nu_k) = \sum_{k=1}^{n}\widetilde{\varphi}(\tau_k)\frac{w(\tau_k,t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad (3)$$

где

$$w(\tau_k,t) = \frac{2\pi}{n+1}\sum_{m=1}^{n}m\sin(m\nu_k)\sin(m\nu),\ t=\cos\nu.$$

Для интеграла со слабой особенностью построим квадратурную формулу. С этой целью подинтегральную функцию $h(t,\tau)\varphi(\tau)$ аппроксимируем полиномом $P_n^\tau(h\varphi)$ по переменной τ. Здесь через P_n^τ обозначен оператор, ставящий в соответствие любой непрерывной функции её интерполяционный полином Лагранжа по узлам τ_k. Тогда имеем

$$T(h\varphi)(t) = \int_{-1}^{1}\frac{h(t,\tau)}{|\tau-t|^\lambda}\varphi(\tau)d\tau \approx \sum_{k=1}^{n}h(t,\tau_k)\widetilde{\varphi}(\tau_k)\int_{-1}^{1}\frac{l_k(\tau)}{|\tau-t|^\lambda}d\tau, \quad (4)$$

где $l_k(\tau)$ – фундаментальные полиномы Лагранжа для узлов τ_k.

Таким образом, используя формулы (3) и (4), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно приближённых значений искомой функции, обозначим их через $\widetilde{\varphi}(\tau_k)$.

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{w(\tau_k,\tau_j)}{\sin\nu}+h(\tau_j,\tau_k)\alpha_{kj}\right]\widetilde{\varphi}(\tau_k) = f(\tau_j)\,(j=1,2,\dots n), \quad (5)$$

где

$$\tau_m = \cos\nu_m;\ \nu_m = \frac{m\pi}{n+1}\,(m=k,j);\ \alpha_{kj} = \int_{-1}^{1}\frac{l_k(\tau)}{|\tau_j-\tau|^\lambda}d\tau.$$

Введём в рассмотрение пространство $L_{2,\rho}$ квадратично-суммируемых функций с весом $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$ с обычной нормой. Через $L_{2,\rho}^{(1)}$ обозначим пространство функций, удовлетворяющих условиям (2), первые производные которых квадратично-суммируемы с весом $\rho(t)$

$$\|\varphi\|_{L^{(1)}_{2,\rho}} = \|\varphi'\|_{L_{2,\rho}} = \|\varphi'\|_{2,\rho} = \left(\int_{-1}^{1} \rho(t)|\varphi'(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Пусть $X = L^{(1)}_{2,\rho}$, $Y = L_{2,\rho}$. Тогда задачу (1)-(2) запишем в виде операторного уравнения, эквивалентного ей,

$$K\varphi = \frac{d}{dt}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_{-1}^{1} \frac{h(t,\tau)}{|t-\tau|^{\lambda}} \varphi(\tau) d\tau. \tag{6}$$

Теорема. *Пусть $f \in C$, $h(t,\tau)$ непрерывна по переменному t и удовлетворяет условию Дини-Липшица по переменной τ и уравнение (6) однозначно разрешимо в X при любой правой части $f \in Y$. Тогда при n таких, что*

$$q_n = A\left\{\omega_t(h, \frac{1}{n})_C + \frac{1}{n^{1-\lambda}} + \left[\omega_\tau(h, \frac{1}{n})_C + \frac{1}{n^{1/4}}\right] \ln n\right\} < 1$$

система (5) имеет единственное решение $\{\widetilde{\varphi}^*(\tau_k)\}_{k=1}^{n}$ и приближённые решения

$$\varphi^*_n(\tau) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \widetilde{\varphi}^*(\tau_k) \frac{\sqrt{1-\tau^2} U_n(\tau) \sqrt{1-\tau_k^2}}{\tau - \tau_k}$$

сходятся к точному решению $\varphi^*(\tau)$ со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi^*_n\|_X = O\{q_n + E_{n-1}(f)_C\},$$

где A – постоянная, не зависящая от n, $\omega_S(h, \frac{1}{n})_C$ – модуль непрерывности функции $h(\cdot,\cdot)$ по переменной S равномерно относительно другой, а $E_{n-1}(f)_C$ – наилучшее равномерное приближение функции $f(t)$ алгебраическими полиномами степени не выше $n-1$.

Литература

1. Каландия А. И. *Математические методы двумерной теории упругости.* – М.: Наука,1973. – 304 с.

2. Габдулхаев Б. Г. *Прямые методы решения уравнения теории крыла* // Известия вузов. Математика. – 1974. – № 2. – С. 29–44.

3. Иванов В. В. *Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений.* – Киев: Наукова думка, 1968. – 288 с.

4. Габдулхаев Б. Г. *Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений* // Итоги науки и техники. Сер. Математики. – 1980. – Т. 18. – М.: ВИНИТИ. – С. 251–307.

5. Ioakimidis N. I. *A natural interpolation formula for Prandtl‘s singular integrodifferential rquation* // Int.j. Meth. Fluids. – 1984. – Т. 4. – № 3. – P. 283–290.

6. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. *Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике.* – М.: Наука, 1985. – 254 с.

7. Захаров Е. В., Собянина И. В. *Об одномерных интегро-дифференциальных уравнениях задач дифракции на экранах* // Журн. выч. матем. и матем. физ. – 1986. – Т. 26. – № 4. – С. 632–636.

8. Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т. *Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции.* – Киев: Наукова думка, 1984. – 344 с.

9. Ахмадиев М. Г. *Прямые методы решения некоторых сингулярных интегро-дифференциальных уравнений.* // Казань:Деп. в ВИНИТИ. – 1986. – № 43. – 18 с.

10. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань.: Изд-во КГУ, 1980. – 232 с.

11. Натансон П. Н. *Конструктивная теория функций.* – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.

APPROXIMATE METHODS OF SOLUTION OF SINGULAR INTEGRO–DIFFERENTIAL EQUATIONS OF DIFFRACTION

M.G. Akhmadiev

For numerical solution of singular integro–differential equations of diffraction it is used the method of mechanical quadratures. It is proved that this method is stable under small perturbations of approximating equations.

Keywords: approximate methods, diffraction problem, method of the mechanical squarings, singular and integro–differential equations, approximating equations, operators equations.

УДК 517.51

ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ СУММАМИ ФУРЬЕ ПО КРАТНОЙ СИСТЕМЕ ВСПЛЕСКОВ С КОМПАКТНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ

Ш.А. Балгимбаева[1]

1 *sholpan.balgyn@gmail.com*; Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

Получены точные по порядку оценки приближения гиперболическими суммами Фурье по кратной системе всплесков с компактными носителями на классах типа Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля в пространстве L_q для всевозможных значений параметров классов и пространства.

Ключевые слова: поперечники Фурье, гиперболический крест, пространства типа Никольского–Бесова, пространства типа Лизоркина–Трибеля.

Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$ — множества натуральных, действительных и целых чисел соответственно; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

Пусть $L_q = L_q([0,1]^d)$ $(1 \le q \le \infty, 2 \le d \in \mathbb{N})$ — пространство измеримых функций $f : [0,1]^d \to \mathbb{C}$, суммируемых в степени q (при $q = \infty$ существенно ограниченных) на $[0,1]^d$ со стандартной нормой

$$\| f \mid L_q \| = \| f \mid L_q([0,1]^d) \| = \Big(\int_{[0,1]^d} | f(x) |^q dx \Big)^{1/q} \ (1 \le q < \infty),$$

$$\| f \mid L_\infty \| = \| f \mid L_\infty([0,1]^d) \| = \operatorname{ess\,sup} \{ | f(x) | : x \in [0,1]^d \}.$$