УДК 517.983

О ДИССИПАТИВНЫХ РАСШИРЕНИЯХ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

В.М. Брук[1]

1 *vladislavbruk@mail.ru*; Саратовский государственный технический университет им. Ю.А. Гагарина

В статье рассматривается интегральное уравнение с операторной мерой. Для этого уравнения устанавливается формула Лагранжа, учитывающая наличие одноточечных атомов у операторной меры. С помощью граничных значений дается описание диссипативных расширений минимального симметрического оператора, порожденного этим уравнением.

Ключевые слова: интегральное уравнение, операторная мера, гильбертово пространство, симметрический оператор, граничная задача.

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. Рассмотрим функцию $\Delta\mapsto\mathbf{P}(\Delta)$, определенную на борелевских множествах $\Delta\subset[a,b]$ и принимающую значения в множестве ограниченных линейных операторов, действующих в H. Функция $\mathbf{P}$ называется операторной мерой на $[a,b]$ (см., например, [1], гл. 5, с. 324), если $\mathbf{P}$ равна нулю на пустом множестве и для любых непересекающихся борелевских множеств Δ_n справедливо равенство $\mathbf{P}\big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Delta_n\big)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(\Delta_n)$ со слабо сходящимся рядом. Далее всякую меру $\mathbf{P}$, определенную на борелевских множествах $\Delta\subset[a,b]$, продолжаем на некоторый отрезок $[a,b_0]\supset[a,b_0)\supset[a,b]$, полагая $\mathbf{P}(\Delta)=0$ для всех борелевских множеств $\Delta\subset[a,b_0]\setminus[a,b]$.

Обозначим $\mathbf{V}_\Delta(\mathbf{P})=\rho(\Delta)=\sup\sum_i\|\mathbf{P}(\Delta_i)\|$, где sup распространяется на конечные суммы непересекающихся борелевских множеств $\Delta_i\subset\Delta$. Число $\mathbf{V}_\Delta(\mathbf{P})$ называется вариацией меры $\mathbf{P}$ на борелевском множестве Δ. Пусть мера $\mathbf{P}$ имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$. Тогда для ρ-почти всех $\xi\in[a,b]$ существует такая операторная функция $\xi\to\Psi(\xi)$ со значениями в множестве линейных ограниченных операторов в H, $\|\Psi(\xi)\|=1$, что для любого борелевского множества $\Delta\subset[a,b]$ справедливо равенство $\mathbf{P}(\Delta)=\int_\Delta\Psi(\xi)\,d\rho$. Этот интеграл сходится в смысле обычной нормы операторов, а функция Ψ определяется однозначно с точностью до значений на множестве нулевой ρ-меры ([1], гл. 5, с. 325).

Символ $\int_{t_0}^{t}$ обозначает $\int_{[t_0,t)}$, если $t_0<t$; $-\int_{[t,t_0)}$, если $t_0>t$; и 0, если $t_0=t$. Функция h интегрируема по мере $\mathbf{P}$ на множестве Δ, если существует интеграл (в смысле Бохнера) $\int_\Delta\Psi(t)h(t)\,d\rho=\int_\Delta(d\mathbf{P})h(t)$. Предположим, что функция h интегрируема по мере $\mathbf{P}$ на $[a,b_0]$. Тогда функция $y(t)=\int_{t_0}^{t}(d\mathbf{P})h(s)$ непрерывна слева в сильном смысле ($t_0,t\in[a,b_0]$). Далее $\mathscr{S}_\mathbf{P}$ обозначает множество одноточечных атомов меры $\mathbf{P}$ (т.е. множество таких $t\in[a,b]$, что $\mathbf{P}(\{t\})\neq0$). Множество $\mathscr{S}_\mathbf{P}$ не более чем счетно.

В следующей теореме J–линейный оператор в H со свойствами: $J=J^*$, $J^2=E$ (E – тождественный оператор); $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{q}$ – операторные меры, имеющие ограниченную вариацию на $[a,b]$, принимающие значения в множестве линейных ограниченных операторов, действующих в H, причем мера $\mathbf{q}$ самосопряженная, т.е. $\mathbf{q}^*(\Delta)=\mathbf{q}(\Delta)$ для любого борелевского множества Δ. Предполагается, что меры $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{q}$ продолжены на отрезок $[a,b_0]\supset[a,b_0)\supset[a,b]$ описанным выше способом.

Теорема 1. *Пусть f, g – интегрируемые на $[a,b_0]$ по мере $\mathbf{q}$ функции; $y_0, z_0 \in H$. Тогда для любых функций y, z вида*

$$y(t)=y_0-iJ\int_{t_0}^{t}d\mathbf{p}_1(s)y(s)-iJ\int_{t_0}^{t}d\mathbf{q}(s)f(s),$$

$$z(t)=z_0-iJ\int_{t_0}^{t}d\mathbf{p}_2(s)z(s)-iJ\int_{t_0}^{t}d\mathbf{q}(s)g(s),\ \ a\leqslant t_0<b_0,\ \ t_0\leqslant t\leqslant b_0,$$

справедлива формула (*аналог формулы Лагранжа*)

$$\int_{c_1}^{c_2}(d\mathbf{q}(t)f(t),z(t))-\int_{c_1}^{c_2}(y(t),d\mathbf{q}(t)g(t))=(iJy(c_2),z(c_2))-(iJy(c_1),z(c_1))+$$
$$+\int_{c_1}^{c_2}(y(t),d\mathbf{p}_2(t)z(t))-\int_{c_1}^{c_2}(d\mathbf{p}_1(t)y(t),z(t))-\sum_{t\in\mathscr{S}_{\mathbf{p}_1}\cap\mathscr{S}_{\mathbf{p}_2}\cap[c_1,c_2)}\big(iJ\mathbf{p}_1(\{t\})y(t),\mathbf{p}_2(\{t\})z(t)\big)-$$
$$-\sum_{t\in\mathscr{S}_{\mathbf{q}}\cap\mathscr{S}_{\mathbf{p}_2}\cap[c_1,c_2)}\big(iJ\mathbf{q}(\{t\})f(t),\mathbf{p}_2(\{t\})z(t)\big)-\sum_{t\in\mathscr{S}_{\mathbf{p}_1}\cap\mathscr{S}_{\mathbf{q}}\cap[c_1,c_2)}\big(iJ\mathbf{p}_1(\{t\})y(t),\mathbf{q}(\{t\})g(t)\big)-$$
$$-\sum_{t\in\mathscr{S}_{\mathbf{q}}\cap[c_1,c_2)}\big(iJ\mathbf{q}(\{t\})f(t),\mathbf{q}(\{t\})g(t)\big),\quad t_0\leqslant c_1\leqslant c_2\leqslant b_0.$$

Пусть отрезок $[l_1,l_2]\subset[a,b_0]$. Рассмотрим множество измеримых по Борелю функций со значениями в H, ограниченных на $[l_1,l_2]$, непрерывных слева на $(l_1,l_2]$ (в сильном смысле) и постоянных на $[l_1,l_2]\cap(b,b_0]$. Определим норму равенством $\|u\|_{[l_1,l_2]}=\sup\limits_{t\in[l_1,l_2]}\|u(t)\|$. Полученное банахово пространство обозначим $\widetilde{C}[l_1,l_2]$. Рассмотрим уравнение

$$y(t)=\int_{t_0}^{t}d\mathbf{p}(\xi)y(\xi)+g(t),\quad a\leqslant t_0\leqslant b_0,\tag{1}$$

где мера $\mathbf{p}$ имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$ (как и выше, полагаем $\mathbf{p}(\Delta)=0$ для всех борелевских множеств $\Delta\subset(b,b_0]$).

Теорема 2. *Для любой функции $g\in\widetilde{C}[a,b_0]$ существует единственное решение уравнения* (1)*, принадлежащее пространству $\widetilde{C}[t_0-\delta,b_0]$, где $\delta=\delta(t_0)>0$ достаточно мало, если $t_0>a$, и $\delta=0$ при $t_0=a$.*

Следствие 1. *Пусть $t_0=a$. Тогда для любой функции $g\in\widetilde{C}[a,b_0]$ уравнение* (1) *имеет единственное решение, принадлежащее пространству $\widetilde{C}[a,b_0]$.*

Следующее уравнение

$$y_s(t)=c+\int_{s}^{t}d\mathbf{p}(\tau)y_s(\tau),\qquad c\in H,\tag{2}$$

является частным случаем уравнения (1) при $g(t)=c$. Через $U(t,s)$ обозначим оператор, ставящий в соответствие каждому элементу $c\in H$ значение решения $y_s(t)$ уравнения (2). Функция $t\to U(t,s)c$ является решением уравнения $U(t,s)c=c+\int_s^t d\mathbf{p}(\tau)U(\tau,s)c$.

Теорема 3. *Пусть $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ – меры с ограниченной вариацией, не имеющие общих одноточечных атомов, и функция f интегрируема по мере $\mathbf{q}$. Тогда решение уравнения*

$$y(t) = c + \int_a^t d\mathbf{p}(s)y(s) + \int_a^t d\mathbf{q}(s)f(s), \ \ c \in H,$$

имеет вид $y(t) = U(t,a)c + \int_a^t U(t,s)d\mathbf{q}(s)f(s)$.

Далее предполагаем, что мера $\mathbf{p}$ самосопряженная. Рассмотрим уравнение

$$y(t) = x_0 - iJ\int_a^t d\mathbf{p}(s)y(s) - iJ\int_a^t f(s)d\mu(s), \tag{3}$$

где J – оператор в H, $J = J^*$, $J^2 = E$, μ – обычная мера Лебега (т.е. мера μ, для которой $\mu([\alpha,\beta)) = \beta - \alpha$ при всех $\alpha,\beta \in [a,b]$), продолженная на отрезок на $[a,b_0)$ равенством $\mu(\Delta) = 0$ для любого борелевского множества $\Delta \subset (b,b_0]$; $x_0 \in H$, $f \in L_1(H;a,b)$ и $f = 0$ на $(b,b_0]$. Согласно следствию 1 уравнение (3) имеет единственное решение.

По мере $\mathbf{p}$ построим непрерывную меру $\mathbf{p}_0$ (т.е. меру без одноточечных атомов) следующим образом. Для всех $t_k \in \mathscr{S}_\mathbf{p}$ полагаем $\mathbf{p}_0(\{t_k\}) = 0$, а для всех борелевских множеств Δ таких, что $\Delta \cap \mathscr{S}_\mathbf{p} = \varnothing$, полагаем $\mathbf{p}_0(\Delta) = \mathbf{p}(\Delta)$. Мера $\mathbf{p}_0$ самосопряженная. Обозначим через W операторное решение уравнения

$$W(t)x_0 = x_0 - iJ\int_a^t d\mathbf{p}_0(\xi)W(\xi)x_0, \ \ x_0 \in H.$$

Из непрерывности меры $\mathbf{p}_0$ и теоремы 1 следует равенство $W^*(t)JW(t) = J$.

Операторы, рассматриваемые ниже, действуют в пространстве $\mathfrak{H} = L_2(H,\mu;a,b_0)$, которое состоит из измеримых функций, определенных на $[a,b]$, принимающих значения в H и имеющих интегрируемый квадрат нормы. Скалярное произведение функций $x,y \in \mathfrak{H}$ задается равенством $(x,y)_\mathfrak{H} = \int_a^{b_0}(x(t),y(t))d\mu(t)$.

Введем оператор L, порожденный уравнением (3), следующим образом. Область определения $\mathscr{D}(L)$ оператора L состоит из функций y, для каждой из которых существует функция $f \in \mathfrak{H}$ такая, что выполняется (3). При этом полагаем $Ly = f$. Оператор L_0, порожденный уравнением (3), определяется как сужение оператора L на множество функций y, удовлетворяющих равенствам $y(a) = y(b_0) = y(t_k) = 0$ для всех $t_k \in \mathscr{S}_\mathbf{p}$. Из теоремы 1 следует, что оператор L_0 симметрический.

Далее предположим, что множество одноточечных атомов $\mathscr{S}_\mathbf{p}$ меры $\mathbf{p}$ конечно и состоит из $n \geqslant 0$ точек. Если $n = 0$, то $\mathscr{S}_\mathbf{p} = \varnothing$. При $n \geqslant 1$ обозначим эти точки как t_k и предположим, что $a < t_1 < \ldots < t_n < b$. Положим $W_k(t) = \chi_{[t_{k-1},t_k]}(t)W(t)$, где $k = 1,\ldots,n+1$; $t_0 = a$; $t_{n+1} = b_0$; $\chi_{[c,d]}$ – характеристическая функция отрезка $[c,d]$. Пусть $\overline{W}(t) = (W_1(t),\ldots,W_{n+1}(t))$ – операторная однострочная матрица, которую при фиксированных t удобно рассматривать как оператор, отображающий H^{n+1} в H и действующий по формуле $\overline{W}(t)\overline{c} = \sum_{k=1}^{n+1} W_k(t)c_k$, где $\overline{c} = (c_1,\ldots,c_{n+1}) \in H^{n+1}$. Обозначим через $\mathscr{W}$ оператор $\overline{c} \to \overline{W}(t)\overline{c}$. Оператор $\mathscr{W}$ непрерывно и взаимно однозначно отображает H^{n+1} в $\mathfrak{H}$ и его область значений замкнута. Сопряженный оператор $\mathscr{V} = \mathscr{W}^*$ отображает $\mathfrak{H}$ на H^{n+1} и действует по формуле $\mathscr{V}f = \int_a^{b_0}\overline{W}^*(s)f(s)d\mu(s)$, $f \in \mathfrak{H}$.

Теорема 4. *Пусть множество* $\mathscr{S}_\mathbf{p}$ *конечно, содержит* $n \geqslant 0$ *точек и* $\mathscr{S}_\mathbf{p} \cap \{a,b\} = \varnothing$. *Тогда* L_0^* *является оператором с областью определения, состоящей из функций*

$$y = \overline{W}(t)\overline{c} - \overline{W}(t)i\widetilde{J}\int_a^t \overline{W}^*(s)f(s)d\mu(s), \tag{4}$$

где $f \in \mathfrak{H}$, $\overline{c} \in H^{n+1}$. *При этом* $L_0^* y = f$. (*Здесь* $\widetilde{J}$ – *оператор в* H^{n+1}, *действующий по формуле* $\widetilde{J}(d_1, \dots, d_{n+1}) = (Jd_1, \dots, Jd_{n+1})$, $d_k \in H$.)

Пусть функция $y \in \mathscr{D}(L_0^*)$ и $L_0^* y = f$. Тогда y имеет вид (4). Для функции y определим граничные значения $Y = \Gamma_1 y$, $Y' = \Gamma_2 y$ равенствами

$$Y = \overline{c} - (1/2)i\widetilde{J}\int_a^{b_0} \overline{W}^*(s) f(s)\, d\mu(s) = \overline{c} - (1/2)i\widetilde{J}\mathcal{V} f, \quad Y' = \int_a^{b_0} \overline{W}^*(s) f(s)\, d\mu(s) = \mathcal{V} f.$$

Обозначим через Γ оператор, отображающий $\mathscr{D}(L_0^*)$ в $H^{n+1} \times H^{n+1}$ согласно формуле $\Gamma y = \{\Gamma_1 y, \Gamma_2 y\}$ (здесь $\{\cdot,\cdot\}$ – упорядоченная пара).

Теорема 5. *Область значений* $\mathscr{R}(\Gamma)$ *оператора* Γ *совпадает с* $H^{n+1} \times H^{n+1}$ *и справедлива "формула Грина"*

$$(L_0^* y, z)_{\mathfrak{H}} - (y, L_0^* z)_{\mathfrak{H}} = (Y', Z) - (Y, Z'),$$

где $y, z \in \mathscr{D}(L_0^*)$, $\Gamma y = \{Y, Y'\}$, $\Gamma z = \{Z, Z'\}$.

Из теоремы 5 следует, что тройка $(H^{n+1}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ является пространством граничных значений в смысле работ [2], [3] (см. также [4], с. 158]). Из [2–4] вытекает

Теорема 6. *Для любого сжатия* K *в* H^{n+1} *сужение оператора* L_0^* *на множество функций* $y \in \mathscr{D}(L_0^*)$, *удовлетворяющих условию*

$$(K - E)\Gamma_2 y + i(K + E)\Gamma_1 y = 0, \tag{5}$$

представляет собой максимальное диссипативное расширение оператора L_0. *Обратно, всякое максимальное диссипативное расширение оператора* L_0 *является сужением оператора* L_0^* *на множество функций* $y \in \mathscr{D}(L_0^*)$, *удовлетворяющих равенству* (5), *причем сжатие* K *определяется по расширению однозначно.*

Литература

1. Березанский Ю.М. *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.* – Киев: Наукова Думка, 1965. – 798 с.

2. Кочубей А. Н. *О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений* // Матем. заметки. – 1975. – Т. 17. – № 1. – С. 41–48.

3. Брук В. М. *Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии* // Матем. сборник. – 1976. – Т. 100. – № 2. – С. 210–216.

4. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.* – Киев: Наукова Думка, 1984. – 284 с.

ON DISSIPATIVE EXTENSIONS OF AN INTEGRAL OPERATOR

V.M. Bruk

In the present work, we consider an integral equation with an operator measure. We establish the Lagrange formula, which takes into account the presence of single-point atoms in the operator measure. With the help of boundary conditions, we describe dissipative extensions of a minimal symmetric operator generated by this integral equation.

Keywords: integral equation, operator measure, Hilbert space, boundary value problem, symmetric operator.