УДК 517.955

КОРРЕКТНО РАЗРЕШИМЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В.С. Мокейчев[1], А.М. Сидоров[2]

1 *valery.mokeychev@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *anatoly.sidorov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Используя теорию φ_B-распределений, мы рассматриваем задачу Коши для линейного дифференциального уравнения в частных производных.

Ключевые слова: линейное дифференциальное уравнение в частных производных, задача Коши, φ_B – распределение.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$P(t,u,D)u = D_t^N u + \sum_{j=1}^{M}\sum_{\alpha\in\Phi} C_{\alpha,j}(t) D_t^j D_x^\alpha u = f(t,x), \tag{1}$$

где $t \in \mathrm{R}$, $x \in \mathrm{R}^n$, D_y – символ дифференцирования по y, Φ – конечное множество мультииндексов, $C_{\alpha,j}(t)$ – квадратная матрица, не зависящая от x и u, $f(t,x)$ – известная функция. не зависящая от u.

Если (1) описывает математическую модель динамического процесса, то решение должно удовлетворять начальным и краевым условиям. При этом получаемая задача должна быть корректно поставленной по Адамару [1].

Пусть

$$f(t,x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} f_k(t) \exp\left(\frac{ikx}{T}\right), \tag{2}$$

где $k = (k_1,\dots,k_n)$ – вектор с целочисленными координатами, $f_k(t)$ – известная функция, не зависящая от x и принадлежащая некоторому банаховому пространству B, $\frac{ikx}{T} = \frac{ik_1x_1}{T_1} + \dots + \frac{ik_nx_n}{T_n}$, $T_j > 0$, $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathrm{R}^n$, i – мнимая единица. В [2], [3] было введено понятие φ_B-распределений, т. е. φ-распределений со значениями в заданном банаховом пространстве B. Эти распределения оказались весьма удобными в том числе и при решении задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Было показано, что пространство φ_B-распределений является наиболее широким пространством, в котором справедливо равенство (2). Решение u уравнения (1) ищется в пространстве φ_B-распределений, т. е.

$$u = \sum_{|k|=0}^{\infty} u_k(t) \exp\left(\frac{ikx}{T}\right). \tag{3}$$

Если $u_k(t) \in C_{loc}^N(\mathrm{R})$, то $u_t^{(m)} = \sum_{|k|=0}^{\infty} u_k^{(m)}(t) \exp\left(\frac{ikx}{T}\right)$, $m = 0,\dots,N$.

Решение u должно удовлетворять условиям Коши

$$u_t^{(m)}(0,x) = g_m(x), \quad m = 0,\dots,N-1, \tag{4}$$

в которых $g_m(x)$ – известные φ_{C^n}-распределения, т. е.

$$g_m(x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} g_{m,k} \exp\left(\frac{ikx}{T}\right), \quad g_{m,k} \in C^n.$$

Определение. *φ_B – распределение и (3) называется решением задачи (1), (4), если*

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} P(t,x,D)\left(u_k(t)\exp\left(\frac{ikx}{T}\right)\right) = f(t,x)$$

и выполнены условия (4).

Теорема. *Если $C_{\alpha,j}(t) \in L^1_{loc}(R)$, то задача (1), (4) корректно разрешима по Адамару в пространстве φ_B-распределений.*

Литература

1. Hadamard J. *Le problème de Cauchy et les équattions aux dérivées partielles linéares hyperbaliques.* – Paris: Hermann, 1932. – 542 p.

2. Mokeichev V. S., Sidorov A. M. *On an expansiion in the series by given system of elements* // Исследования по прикладной математике и информатике. – Казань: Казанский госуниверситет. – 2004. – Вып. 25. – С. 163–167.

3. Мокейчев В. С. *О разложении в ряды по заданной системе элементов* // Исследования по прикладной математике и информатике. – Казань: Изд-во Казанского федерального университета. – 2011. – Вып. 27. – С. 144–152.

CORRECTLY SOLVABLE PROBLEMS IN LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

V.S. Mokeychev, A.M. Sidorov

By use of the theory of φ_B – distributions we consider Cauchy's problem for linear partial differential equations.

Keywords: linear partial differential equation, Cauchy's problem, φ_B-distribution.

УДК 514.822

НЕРАВЕНСТВА, ВКЛЮЧАЮЩИЕ ВКЛЮЧАЮЩИЕ ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНУЮ

Р.Г. Насибуллин[1]

1 *nasibullinramil@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Доказаны новые неравенства, включающие дробные интегралы функции и ее производную. Предварительно мы получаем нижние оценки весовых норм производной через выражения, зависящие от дробных интегралов Римана-Лиувилля.

Ключевые слова: неравенство Харди, дробный интеграл Римана-Лиувилля, функция Бесселя.