где $c > 0$ *и зависит лишь от* s.

Отметим также работу [3], в которой получено неравенство типа Сегё для алгебраического полинома. Это неравенство используется для изучения связи между наилучшими равномерными полиномиальными приближениями сопряжённых функций, заданных на отрезке.

Работа выполнена в рамках программы ГПНИ НАН Беларуси "Конвергенция".

Литература

1. Pekarskii A. A. *Approximation by rational functions with free poles* // East J. on Approxim. – 2007. – V. 13. – № 3. – P. 227–319.

2. Мардвилко Т. С., Пекарский А. А. *Сопряжённые функции на отрезке и их связь с равномерными рациональными и кусочно-полиномиальными приближениями* // Матем. заметки. – 2016. – Т. 99. – № 2. – С. 248–261.

3. Мисюк В. Р., Пекарский А. А. *Сопряжённые функции на отрезке и соотношения для их наилучших равномерных полиномиальных приближений* // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2015. – № 2. – С. 37–40.

A SZEGÖ-TYPE INEQUALITY FOR THE DERIVATIVES OF THE CONJUGATE RATIONAL FUNCTION ON A SEGMENT

T.S. Mardvilko, A.A. Pekarskii

In the present paper, the conjugate function is considered. A Szegö-type inequality for the derivatives of the conjugate rational function on a closed interval was obtained. This inequality was proved when we investigated the relationship between the rate of the best uniform rational approximations of a function and the rates of the best uniform piecewise polynomial approximations.

Keywords: algebraic polinomials, rational functions, Bernstein-type inequality, Szegö-type inequality, the conjugate functions, the best uniform polinomial approximations, the best uniform rational approximations, the best piecewise polinomials approximations.

УДК 517.95

ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМ ЗНАКОМЕНЯЮЩИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Н.В. Мартемьянова[1]

1 *ninamartem@yandex.ru*; Самарский государственный социально-педагогический университет

В статье строится общее решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменным знакоменяющим коэффициентом, возникающего при решении обратных задач для вырождающихся уравнений смешанного типа спектральным методом. Установлены некоторые свойства общего решения, которое определяется через функции Бесселя.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение с переменным

знакоменяющим коэффициентом, общее решение, частное решение, функции Бесселя.

При построении решения обратных задач для вырождающихся уравнений смешанного типа методом разделения переменных [1 – 8] возникает необходимость построения общего решения уравнения

$$T''(y) - \lambda^2 (\operatorname{sgn} y)|y|^n T(y) = f(y), \tag{1}$$

из класса

$$T(y) \in C^2(I) \cap C^1(\overline{I}), \tag{2}$$

где $I = \{y | -\alpha < y < \beta,\ y \neq 0\}$, n, α, β – заданные положительные числа, $f(y) = f_1(y)$ при $y > 0$ и $f(y) = f_2(y)$ при $y < 0$, $f_1(y)$, $f_2(y)$ – заданные непрерывные функции.

Следуя [9], общее решение дифференциального уравнения (1) будем искать в виде

$$T(y) = \begin{cases} a(y)\sqrt{y} I_{\frac{1}{2q}}(py^q) + b(y)\sqrt{y} K_{\frac{1}{2q}}(py^q), & y > 0, \\ c(y)\sqrt{-y} J_{\frac{1}{2q}}(p(-y)^q) + d(y)\sqrt{-y} Y_{\frac{1}{2q}}(p(-y)^q), & y < 0, \end{cases}$$

где $p = \frac{\lambda}{q}$, $q = \frac{n+2}{2}$. На основании метода вариации найдем представления для неизвестных функций

$$a(y) = -\frac{1}{q}\int_y^\beta \sqrt{t} f_1(t) K_{\frac{1}{2q}}(pt^q)\,dt + a, \quad b(y) = -\frac{1}{q}\int_0^y \sqrt{t} f_1(t) I_{\frac{1}{2q}}(pt^q)\,dt + b,$$

$$c(y) = \frac{\pi}{2q}\int_0^y \sqrt{-t} f_2(t) Y_{\frac{1}{2q}}(p(-t)^q)\,dt + c, \quad d(y) = -\frac{\pi}{2q}\int_0^y \sqrt{-t} f_2(t) J_{\frac{1}{2q}}(p(-t)^q)\,dt + d,$$

где a, b, c, d – произвольные постоянные, и подставим их в общее решение

$$T(y) = \begin{cases} a\sqrt{y} I_{\frac{1}{2q}}(py^q) + b\sqrt{y} K_{\frac{1}{2q}}(py^q) + \omega^+(y), & y > 0, \\ c\sqrt{-y} J_{\frac{1}{2q}}(p(-y)^q) + d\sqrt{-y} Y_{\frac{1}{2q}}(p(-y)^q) + \omega^-(y), & y < 0, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$\omega^+(y) = -\frac{1}{q}\sqrt{y} I_{\frac{1}{2q}}(py^q)\int_y^\beta f_1(t)\sqrt{t} K_{\frac{1}{2q}}(pt^q)\,dt - \frac{1}{q}\sqrt{y} K_{\frac{1}{2q}}(py^q) \times$$
$$\times \int_0^y f_1(t)\sqrt{t} I_{\frac{1}{2q}}(pt^q)\,dt, \quad y > 0, \tag{4}$$

$$\omega^-(y) = \frac{\pi}{2q}\sqrt{-y} J_{\frac{1}{2q}}(p(-y)^q)\int_0^y f_2(t)\sqrt{-t} Y_{\frac{1}{2q}}(p(-t)^q)\,dt -$$
$$-\frac{\pi}{2q}\sqrt{-y} Y_{\frac{1}{2q}}(p(-y)^q)\int_0^y f_2(t)\sqrt{-t} J_{\frac{1}{2q}}(p(-t)^q)\,dt, \quad y < 0. \tag{5}$$

Поскольку решение $T(y)$ принадлежит классу (2), то для него должны быть выполнены условия сопряжения:

$$T(0-0) = T(0+0), \quad T'(0-0) = T'(0+0). \tag{6}$$

Предварительно рассмотрим функции $\omega^+(y)$, $\omega^-(y)$ и изучим их свойства. Основываясь на формулах дифференцирования функций Бесселя [10, с. 305], найдем первые и вторые производные:

$$\omega^{+\prime}(y) = -py^{q-\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2q}-1}(py^q) \int_y^\beta f_1(t)\sqrt{t} K_{\frac{1}{2q}}(pt^q)dt + py^{q-\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{2q}-1}(py^q) \times$$
$$\times \int_0^y f_1(t)\sqrt{t} I_{\frac{1}{2q}}(pt^q)dt, \tag{7}$$

$$\omega^{-\prime}(y) = -\frac{\pi}{2} p(-y)^{q-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2q}-1}(p(-y)^q) \int_0^y f_2(t)\sqrt{-t} Y_{\frac{1}{2q}}(p(-t)^q)dt +$$
$$+\frac{\pi}{2} p(-y)^{q-\frac{1}{2}} Y_{\frac{1}{2q}-1}(p(-y)^q) \int_0^y f_2(t)\sqrt{-t} J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)dt, \tag{8}$$

$$\omega^{+\prime\prime}(y) = -(pq)^2 y^n \frac{1}{q} \sqrt{y} I_{\frac{1}{2q}}(py^q) \int_0^y f_1(t)\sqrt{t} K_{\frac{1}{2q}}(p(t)^q)dt +$$
$$-(pq)^2 y^n \frac{1}{q} \sqrt{y} K_{\frac{1}{2q}}(py^q) \int_0^y f_1(t)\sqrt{t} I_{\frac{1}{2q}}(pt^q)dt + f_1(y) = (pq)^2 y^n \omega^+(y) + f_1(y), \tag{9}$$

$$\omega^{-\prime\prime}(y) = -(pq)^2 q(-y)^n \left[\frac{\pi}{2q}\sqrt{-y} J_{\frac{1}{2q}}(p(-y)^q) \int_0^y f_2(t)\sqrt{-t} Y_{\frac{1}{2q}}(p(-t)^q)dt -\right.$$
$$\left.-\frac{\pi}{2q}\sqrt{-y} Y_{\frac{1}{2q}}(p(-y)^q) \int_0^y f_2(t)\sqrt{-t} J_{\frac{1}{2q}}(p(-t)^q)dt\right] + f_2(y) = -(pq)^2(-y)^n \omega^-(y) + f_2(y). \tag{10}$$

Из формул (9), (10) получаем, что функции $\omega^+(y)$ и $\omega^-(y)$ являются решениями уравнения (1) при $y>0$ и $y<0$ соответственно.

Теперь определим поведение функций $\omega^+(y)$ и $\omega^-(y)$ и их производных в нуле.

С учетом асимптотических оценок для функций Бесселя при $z \to 0$ [10, с. 307] из (4), (5), (7), (8) найдем

$$\omega^+(0+0) = 0, \quad \omega^-(0-0) = 0, \tag{11}$$

$$\omega^{+\prime}(0+0) = -\frac{p}{\Gamma(\frac{1}{2q})}\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{2q}-1} \int_0^\beta f_1(t)\sqrt{t} K_{\frac{1}{2q}}(pt^q)dt, \quad \omega^{-\prime}(0-0) = 0. \tag{12}$$

Таким образом, установлена следующая

Лемма. *Функции $\omega^+(y)$ и $\omega^-(y)$ являются решениями соответственно неоднородного уравнения (1) при $y>0$, $y<0$, удовлетворяют граничным условиям (11), (12) и*

$$\omega_k^{+\prime\prime}(0+0) = f_1(0), \quad \omega_k^{-\prime\prime}(0-0) = f_2(0).$$

Используя доказанную лемму и асимптотические оценки в нуле для функций Бесселя, получим, что функция (3) удовлетворяет условиям сопряжения (6) только тогда, когда

$$d = -\frac{\pi}{2}b, \quad c = \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4q}b - a + \frac{1}{q}\int_0^\beta f_1(t)\sqrt{t}K_{\frac{1}{2q}}(pt^q)\,dt.$$

Подставив найденные значения c, d в (3), получим окончательный вид общего решения уравнения (1) из класса (2):

$$T(y) = \begin{cases} a\sqrt{y}I_{\frac{1}{2q}}(py^q) + b\sqrt{y}K_{\frac{1}{2q}}(py^q) + \omega^+(y), & y > 0, \\ -a\sqrt{-y}J_{\frac{1}{2q}}(p(-y)^q) + b\sqrt{-y}\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p(-y)^q) + \widetilde{\omega}^-(y), & y < 0, \end{cases}$$

где

$$\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p(-y^q)) = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{2q}}(J_{\frac{1}{2q}}(p(-y^q)) + J_{-\frac{1}{2q}}(p(-y^q))),$$

$$\widetilde{\omega}^-(y) = \omega^-(y) + \frac{1}{q}\int_0^\beta f_1(t)\sqrt{t}K_{\frac{1}{2q}}(pt^q)\,dt.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-31-00421).

Литература

1. Сабитов К. Б., Рахманова Л. Х. *Начально-граничная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области* // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т.44. – № 9. – С. 1175–1181.

2. Сабитова Ю. К. *Критерий единственности решения нелокальной задачи для вырождающегося уравнения смешанного типа в прямоугольной области* // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46. – № 8. – С. 1205–1208.

3. Бурханова (Хаджи) И. А. Критерий единственности решения обратной задачи уравнения смешанного типа с оператором типа Чаплыгина // Дифф. уравнения и смежные проблемы: Труды межд. научн. конф.: В 2 т. Уфа: РИЦ БашГУ, 2013. – Т. 1. – С. 140–144.

4. Сабитова Ю. К. *Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии* // Матем. заметки. – 2015. – Т. 98. – Вып. 3. – С. 393–406.

5. Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. *Обратная задача для вырождающегося параболо- гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием* // Изв. вузов. Математика. – 2015. – № 1. – С. 46–59.

6. Мартемьянова Н. В. *Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором типа Чаплыгина* // Совр. пробл. матем. физики и выч. матем.: Межд. конф. – М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2016. – С.168.

7. Мартемьянова Н. В. *Необходимое и достаточное условие единственности решения нелокальной обратной задачи для уравнения типа Чаплыгина* // Матем. моделирование процессов и систем: Матер. V Всеросс. научно-практ. конф. – Ч. III. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2016. – С. 19–23.

8. Мартемьянова Н. В. *Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором Чаплыгина* // Современная математика и ее приложения: Матер. Межд. научно-практ. конф. – Ч. II. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2017. – С. 66–69.

9. Сабитов К. Б *Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области* // Докл. РАН. – 2007. – Т. 413(1). – С. 23–26.

10. Сабитов К. Б. *Уравнения математической физики* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 352 с.

CONSTRUCTION OF GENERAL SOLUTION OF SECOND ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION WITH A VARIABLE CHANGING SIGN COEFFICIENT

N.V. Martemyanova

While solving inverse problems for a degenerate mixed type equation we obtain a inhomogeneous ordinary equation with a variable changing sign coefficient. We construct general solution of this equation and prove some its properties.

Keywords: inhomogeneous ordinary differential equation with a variable changing sign coefficient, general solution, particular solution.

УДК 517.53

ОБ НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

В.Р. Мисюк[1]

1 *misiuk@grsu.by*; Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, г. Гродно, Беларусь

В статье рассматривается вопрос о наилучшем приближении степенной функции в пространстве Бергмана.

Ключевые слова: наилучшее полиномиальное приближение, прямые теоремы, пространство Бергмана.

Пусть S – спрямляемая кривая Жордана (простая или замкнутая) в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Для $0 < p \le \infty$ через $L_p(S)$ обозначим пространство Лебега комплекснозначных на S относительно линейной меры Лебега с обычной квазинормой $\|L_p(S)\|$ (нормой при $1 \le p \le \infty$). Именно, $f \in L_p(S)$, если

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(S)} := \left(\int_D \left|f(\xi)\right|^p |d\xi| \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \qquad \text{при} \quad 0 < p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty(S)} := \sup_{\xi \in S} \left|f(\xi)\right| < \infty \qquad \text{при} \quad p = \infty.$$

Согласно определению [1-3], функция f, аналитическая в круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, принадлежит пространству Харди H_p, $0 < p \le \infty$, если конечна квазинорма

$$\|f\|_{H_p} = \sup_{r \in (0,1)} \|f\|_{L_p(S_r)},$$

где S_r – окружность $|\xi| = r$. Как известно, почти для всех $\xi \in D$ функция $f(z)$, $z \in D$ имеет некасательные предельные значения. Таким образом, функция $f \in H_p$ определена не только в D, но и почти всюду на ∂D – границе D. При этом оказывается, что $\|f\|_{H_p} = \|f\|_{L_p(\partial D)}$.