УДК 517.968

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УСЛОВНО КОРРЕКТНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю.Р. Агачев[1], М.Ю. Першагин[2]

1 *jagachev@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
2 *mpershagin@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В статье дается теоретико–функциональное обоснование общего полиномиального проекционного метода решения краевых задач для одного класса условно корректных интегро–дифференциальных уравнений. Уравнения характеризуются положительностью разности порядков внутреннего и внешнего дифференциальных операторов. Как следствие, устанавливается сходимость методов Галеркина и коллокации.

Ключевые слова: пространство Соболева, интегро–дифференциальное уравнение, общая краевая задача, проекционный метод, полиномиальное приближение, сходимость метода.

Рассматривается общая линейная краевая задача

$$R_i(x) = 0,\ i = \overline{1,m}, \tag{1}$$

для интегро–дифференциального уравнения

$$Kx \equiv x^{(m)}(t) + \sum_{k=1}^{m} g_k(t)x^{(m-k)}(t) + \sum_{j=0}^{r} \int_{-1}^{+1} h_j(t,s)x^{(j)}(s)\,ds = y(t), \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \tag{2}$$

где $\{R_i\}$ — линейно–независимые функционалы на пространстве $(m-1)$-раз непрерывно дифференцируемых на сегменте $[-1,1]$ функций, $y(t)$, $g_k(t)$, $k = \overline{1,m}$, и $h_j(t,s)$, $j = \overline{0,r}$, – известные функции в своих областях определения.

Пусть $W^pL_q \equiv W^pL_q[-1,1], p \in \mathbb{N}, 1 \leqslant q \leqslant \infty$, суть пространства Соболева функций, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $p-1$, p-тая производная которых принадлежит пространству Лебега $L_q \equiv L_q(-1,1)$ $(L_\infty \equiv C)$.

Задачу (1), (2) будем рассматривать в паре пространств (X,Y), где $X = \overset{\circ}{W}{}^rL_q$ – подпространство функций из W^rL_q, удовлетворяющих краевым условиям (1), а $Y = W^pL_q$, где $p = r - m \geqslant 1$.

В пространстве Y норму задаем формулой

$$\|f\|_{p;q} \equiv \|f\|_{W^pL_q} = \|f\|_q + \|f^{(p)}\|_q,\ f \in W^pL_q,$$

а в пространстве X – формулой:

$$\|x\|_X = \|x^{(m)}\|_q + \|x^{(r)}\|_q,\ x \in X.$$

Корректная постановка задачи (1), (2) в паре пространств (X,Y) изучена в [1].

Запишем исходную задачу в операторном виде:

$$Kx \equiv Dx + Gx + Hx = y \quad (x \in X,\ y \in Y),$$

где

$$Dx \equiv x^{(m)}(t), \quad Gx \equiv (Gx)(t) = \sum_{k=1}^{m} g_k(t)x^{(m-k)}(t),$$

$$Hx \equiv (Hx)(t) = \sum_{j=0}^{r} \int_{-1}^{+1} h_j(t,s)x^{(j)}(s)\,ds.$$

Пусть $X_n = \boldsymbol{H}_{n+m} \subset X$, $Y_n = \boldsymbol{H}_n$, $P_n : Y \longrightarrow Y_n$ – фиксированный оператор проектирования.

Согласно общему проекционному методу приближенное решение $x_n \in X_n$ задачи (1), (2) будем искать как точное решение уравнения

$$K_n x_n \equiv Dx_n + P_n G x_n + P_n H x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n). \tag{3}$$

Имеют место следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения:*

1) $y \in Y$;

2) $G + H : X \to Y$ – вполне непрерывный оператор;

3) исходная задача имеет единственное решение при любой правой части из Y;

4) $P_n^2 = P_n$ и $\|P_n\|_{Y\to Y} = O(M_n)$, $n \to \infty$.

Если y и H таковы, что

$$M_n \cdot [E_n(y)_Y + E_n(Gx^*) + E_n(Hx^*)_Y] \to 0, \; n \to \infty,$$

то для достаточно больших n уравнение (3) *имеет единственное решение. При этом приближенные решения сходятся к точному по норме пространства X со скоростью:*

$$\|x_n^* - x^*\|_X = O(M_n \cdot [E_n(y)_Y + E_n(Gx^*)_Y + E_n(Hx^*)_Y]).$$

Далее, без ограничения общности, функционалы $\{R_i\}$ будем считать дискретными, а именно,

$$R_i(x) = x^{(i-1)}(-1), \; i = \overline{1,m}.$$

Это сделано лишь для наглядности нижеприведенных вычислительных схем конкретных методов.

Метод Галеркина. Приближенное решение задачи (1), (2) ищем в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=m}^{n+m} \alpha_k (t+1)^k, \tag{4}$$

а неизвестные коэффициенты $\{\alpha_k\}_m^{n+m}$ определим из условий

$$\left(Kx_n - y, t^j\right) = 0, \; j = \overline{0,n},$$

где скалярное произведение вводится в пространстве L_2.

Эти условия эквивалентны системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{k=m}^{n+m} \gamma_{kj}\alpha_k = y_j, \; j = \overline{0,n}, \tag{5}$$

где
$$\gamma_{kj} = \left(K(t+1)^k, t^j\right)_2, \quad y_j = \left(y, t^j\right)_2. \tag{6}$$

СЛАУ (5), (6) эквивалентна уравнению
$$K_n x_n \equiv D x_n + S_n G x_n + S_n H x_n = S_n y \left(x_n \in X_n\right),$$
в котором S_n – оператор Фурье, построенный по ортогональной системе полиномов в L_2, то есть системе полиномов Лежандра.

В пространстве $Y = W^p L_2$ введем класс $\widetilde{Y} = W^{2p} H_{2,\alpha}$ функций, $2p$-тая производная которых принадлежит классу Гельдера в пространстве L_2 с показателем $0 < \alpha \leqslant 1$, при этом $p = r - m \geqslant 1$.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения:*

1) $g_k, k = \overline{1, m}, y \in \widetilde{Y}$*;*

2) $h_j \in \widetilde{Y} \times L_1,\ j = \overline{0, r-1}$*;*

3) $h_r \in \widetilde{Y} \times L_2$*;*

4) однородная задача, соответствующая (1), (2)*, имеет лишь нулевое решение.*

Тогда система (5)*,* (6) *имеет единственное решение* $\{\alpha_k^*\}_{k=m}^{n+m}$ *(хотя бы для всех* n*, начиная с некоторого* n_0*). Приближенные решения* $x_n^*(t)$*, построенные по формуле* (4) *при* $\alpha_k = \alpha_k^*$*, сходятся к точному решению* $x^*(t)$ *задачи* (1)*,* (2) *в пространстве* X *со скоростью:*
$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\left(n^{-\alpha}\right).$$

Метод коллокации. Приближенное решение задачи (1), (2) по-прежнему будем искать в виде (4). Неизвестные коэффициенты $\{\alpha_k\}_m^{n+m}$ определим по методу коллокации из условий:
$$(K x_n)(t_j) = y(t_j),\ j = \overline{0, n},$$
где $\{t_j\}_{j=0}^n \subset [-1, 1]$ – некоторая система различных точек. Эти условия относительно $\{\alpha_k\}_m^{n+m}$ дают СЛАУ вида (5), где
$$\gamma_{kj} = (K(t+1)^k)(t_j), \quad y_j = y(t_j). \tag{7}$$

В пространстве $Y = W^p L_2$ введем класс $\widetilde{Y} = W^{2p} H_\alpha$ функций, $2p$-тая производная которых принадлежит классу Гельдера в пространстве $C[-1, +1]$ с показателем $0 < \alpha \leqslant 1$.

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения:*

1) $g_k, k = \overline{1, m}, y \in \widetilde{Y}$*;*

2) $h_j \in \widetilde{Y} \times L_1,\ j = \overline{0, r-1}$*;*

3) $h_r \in \widetilde{Y} \times L_2$*;*

4) однородная задача, соответствующая (1), (2)*, имеет лишь нулевое решение;*

5) $\{t_j\}_{j=0}^n \subset [-1, 1]$ *– узлы Чебышёва I-рода.*

Тогда система (5)*,* (7) *имеет единственное решение* $\{\alpha_k^*\}_{k=m}^{n+m}$ *(хотя бы для всех* n*, начиная с некоторого* n_0*). Приближенные решения* $x_n^*(t)$*, построенные по формуле* (4) *при* $\alpha_k = \alpha_k^*$*, сходятся к точному решению* $x^*(t)$ *задачи* (1)*,* (2) *в пространстве* X *со скоростью:*

$$\|x^* - x_n^*\|_{r;2} = O\left(n^{-\alpha}\right).$$

В следующей теореме приводятся достаточные условия сходимости метода, когда задача (1), (2) рассматривается в другой паре пространств (X, Y), а именно $X = \mathring{W}^r L_\infty$, $Y = W^p L_\infty$, $p = r - m \geqslant 1$. Как и выше, используется класс функций $\widetilde{Y} = W^{2p} H_\alpha$.

Теорема 4. *При выполнении предположений 1), 2), 4), 5) теоремы* 3 *и предположения* $h_r \in \widetilde{Y} \times L_1$ *приближенные решения* $x_n^*(t)$ *сходятся к точному решению* $x^*(t)$ *по норме пространства* $W^r L_\infty$ *со скоростью:*

$$\|x^* - x_n^*\|_{r;\infty} = O\left(\frac{\ln n}{n^\alpha}\right).$$

В заключение отметим, что доказательство этих теорем проводится с использованием предложенного Б.Г. Габдулхаевым варианта теории приближенных методов [2] и ряда результатов из теории приближения функций алгебраическими полиномами в пространствах Лебега (см., напр., [2, 3]).

Литература

1. Агачев Ю. Р., Першагин М. Ю. *Корректная постановка условно корректных интегро-дифференциальных уравнений в новой паре невесовых пространств Соболева* // Изв. вузов. Математика. – 2017. – № 8. – С. 80—85.

2. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 232 с.

3. Буренков В. И. *О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале* // Труды Матем. ин-та АН СССР. – 1980. – № 156. – С. 22–29.

POLYNOMIAL SOLUTION METHODS FOR CONDITIONALLY WELL-POSED INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

J.R. Agachev, M.Yu. Pershagin

The article provides a theoretical and functional justification for a general polynomial projective method for solving boundary value problems for a class of conditionally well-posed integro–differential equations. This equations are characterized by the positivity of the difference of orders of magnitude of internal and external differential operators. Consequently, the convergence of the Galerkin and collocation methods is established.

Keywords: Sobolev space, integro-differential equation, general boundary-value problem, projection method, polynomial approximation, convergence of the method.