УДК 517.5

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ МОДУЛЯ ДВУСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ ЕЕ ВДОЛЬ ОСИ АБСЦИСС

Д.Н. Даутова[1], С.Р. Насыров[2]

1 *dautovadn@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *snasyrov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Исследуется асимптотическое поведение модуля достаточно произвольной двусвязной области при растяжении ее вдоль оси абсцисс. Получен аналог классической теоремы Радо, позволяющий обосновать предполагаемую асимптотическую формулу, уже доказанную для случая симметричной относительно оси абсцисс области. Тем самым дается ответ на проблему Вуоринена в несимметричном случае.

Ключевые слова: конформный модуль, двусвязная область, четырехсторонник, квазиконформное отображение, сходимость к ядру областей, простые концы плоской области.

Одной из важнейших геометрических характеристик плоской двусвязной области B является ее конформный модуль. Если B конформно эквивалентна круговому кольцу $\{r_1 < |z| < r_2\}$, то (см., напр., [1])

$$m(B) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Модуль инвариантен относительно конформных отображений, но не сохраняется под действием квазиконформных отображений областей. В работе будем рассматривать частный случай квазиконформного отображения — растяжение f_H вдоль оси абсцисс с коэффициентом $H : x + iy \mapsto Hx + iy$, $H > 0$. М. Вуоринен поставил задачу об изучении асимптотического поведения модуля области $B_H := f_H(B)$ при неограниченном возрастании H (см, напр., [2]). В [2] была найдена асимптотика модуля B_H в случае, когда B является разностью двух гомотетичных прямоугольников со сторонами, параллельными координатным осям. В [3] показано, что

$$m(B_H) \sim \frac{1}{2cH}, \quad c = \int_a^b \frac{dx}{g(x) - f(x)}, \quad H \to +\infty.$$

Здесь B — область, симметричная относительно оси абсцисс, граница которой состоит из двух кривых

$$\Gamma_1 = \{x + iy : |y| = f(x), a \le x \le b\}, \quad \Gamma_2 = \{x + iy : |y| = g(x), c \le x \le d\},$$
$$-\infty < c < a < b < d < \infty, \quad 0 \le f(x) < g(x),\ a \le x \le b.$$

Целью данной работы является установление аналогичного факта для несимметричных двусвязных областей достаточно произвольного вида.

Пусть $-\infty < c < a < b < d < \infty$ и функции $f_1, f_2 \in C[a, b]$, $g_1, g_2 \in C[c, d]$ таковы, что

$$f_1(a) = f_2(a),\ f_1(b) = f_2(b),\ f_1(x) > f_2(x),\ a < x < b;$$

$$g_1(c) = g_2(c),\ g_1(d) = g_2(d),\ g_1(x) > g_2(x),\ c < x < d;$$

$$g_2(x) < f_2(x) \le f_1(x) < g_1(x),\ a \le x \le b,$$

Рассмотрим двусвязную область B, граница которой описывается уравнениями:

$$\Gamma_1 = \{x + iy : y = f_1(x),\ y = f_2(x),\ a \le x \le b\},$$

$$\Gamma_2 = \{x + iy : y = g_1(x),\ y = g_2(x),\ c \le x \le d\},$$

Теорема 1. *При $H \to \infty$ модуль $m(B_H)$ имеет следующее асимптотическое поведение:*

$$m(B_H) \sim \frac{1}{(c_1 + c_2)H}, \quad c_1 = \int_a^b \frac{dx}{g_1(x) - f_1(x)}, \quad c_2 = \int_a^b \frac{dx}{f_2(x) - g_2(x)} \tag{1}$$

Одним из ключевых моментов доказательства теоремы 1 является следующая теорема 2 о равномерной сходимости последовательности конформных отображений двусвязных областей, модуль которых стремится к нулю. Эта теорема является аналогом классической теоремы Радо (см. [4]).

Рассмотрим последовательность двусвязных областей G_n, ограниченных жордановыми кривыми C_{1n} и C_{2n}, которые сходятся как к ядру по Каратеодори (см. [4]) к односвязной области G, граница которой состоит из двух жордановых кривых C_1 и C_2, пересекающихся в одной точке $\widetilde{z}$. Пусть D_n — последовательность неконцентрических колец

$$D_n = \{|\zeta| < 1\} \setminus \{|\zeta + r_n| < r_n\}, \quad 0 < r_n < 1/2,$$

$r_n \nearrow 1/2$, $n \to \infty$, которая сходится как к ядру к круговой луночке

$$D = \{|\zeta| < 1\} \setminus \{|\zeta + 1/2| < 1/2\}$$

с нулевыми углами.

Теорема 2 (обобщенная теорема Радо). *Пусть последовательность функций $z = f_n(\zeta)$ конформно отображает области D_n на G_n, $f_n(0) = z_{0n} \in \partial G_n$. Пусть функция $z = f(\zeta)$, конформно отображает D на G, причем $f(0) = z_0$, $z_0 \ne \widetilde{z}$, $z_0 \in \partial G$, причем простые концы области D, соответствующие точке (-1), переходят в простые концы, соответствующие точке $\widetilde{z}$. Пусть $z_{0n} \to z_0$, $n \to \infty$. Если существуют гомеоморфизмы $g_{1n} : C_1 \to C_{1n}$, $g_{2n} : C_2 \to C_{2n}$, такие что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \ge N$ выполняются неравенства $|g_{1n}(t) - t| < \varepsilon, \quad t \in C_1; \quad |g_{2n}(s) - s| < \varepsilon, \quad s \in C_2$, то $f_n(\zeta) \rightrightarrows f(\zeta)$ в $\overline{D}$.*

Доказательство теоремы 2 основано на использовании теории простых концов последовательностей областей, сходящихся к ядру [5], и теоремы типа Каратеодори о связи сходимости к ядру областей со сходимостью соответствующих конформных отображений в случае граничной нормировки этих отображенй ([6], теорема 14.6).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан (грант № 17-41-160345).

Литература

1. R. Kühnau. *The conformal module of quadrilaterals and of rings.* In: Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory, (ed. by R. Kühnau) Vol. 2. North Holland, Amsterdam: Elsevier, 2005, 99–129.

2. Nasyrov S.R. *Riemann-Schwarz reflection principle and asymptotics of modules of rectangular frames* // Computational Methods and Function Theory. – 2015. – V. 15. – No 1. – P. 59–74.

3. Даутова Д. Н., Насыров С. Р. *Асимптотика модулей зеркально симметричных двусвязных областей при растяжении* // Матем. заметки. – 2018. (в печати).

4. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1966.

5. Суворов Г. Д. *Простые концы и последовательности плоских отображений.* – Киев: Наукова думка, 1986.

6. Насыров С. Р. *Геометрические проблемы теории разветвленных накрытий римановых поверхностей.* – Казань: Магариф, 2008.

ASYMPTOTICS OF MODULUS OF DOUBLY CONNECTED DOMAIN
STRETCHED ALONG THE REAL AXIS

D.N. Dautova, S.R. Nasyrov

We investigate asymptotical behavior of the conformal modulus of a doubly connected domain stretched along the real axis. We obtained a generalization of classical Rado's theorem which allows us to substantiate the desired asymptotic formula, already established for symmetric domains. This gives an answer to the problem by Prof. M. Vuorinen.

Keywords: conformal modulus, double connected domain, quadrilateral, quasiconformal mapping, convergence to a kernel, prime ends of a plane domain.

УДК 517.51

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ РЕШЕНИЯ СЛАБО СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

С.Р. Еникеева[1]

1 *enikeeva.svetlana@mail.ru*; Казанский национальный исследовательский технологический университет

В статье предложено теоретическое обоснование метода наименьших квадратов для слабо сингулярного интегрального уравнения.

Ключевые слова: слабо сингулярное интегральное уравнение, метод наименьших квадратов, полиномиальное приближение, сходимость метода.

Многочисленные прикладные и теоретические задачи математики, механики, физики, химии и техники приводят к необходимости решения различных классов интегральных уравнений с разностными логарифмическими ядрами в главной части интегрального оператора.

Рассмотрим слабо сингулярное интегральное уравнение первого рода вида

$$Kx \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} p(\tau)\ln|\tau - t|x(\tau)\,d\tau + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} p(\tau)h(t,\tau)x(\tau)\,d\tau = y(t),\ -1 \le t \le 1. \qquad (1)$$