Литература

1. Dezin A. A. *On the solvable extensions of partial differential operators*. – Outlines of the Joint Soviet-American Symposium on PDE, 1963, Novosibirsk. – С. 65–66.

2. Нахушева З. А. *Об одной нелокальной задаче А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева-Бицадзе* / А.М. Нахушева // Дифф. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1199–2003.

3. Сабитов К. Б., Новикова В. А. *Нелокальная задача А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева-Бицадзе* // Изв. вузов. Математика. – 2016. – № 6. – С. 61–72.

4. Сабитов К. Б., Гущина (Новикова) В. А. *Задача А.А. Дезина для неоднородного уравнения Лаврентьева-Бицадзе* // Сиб. матем. журн. – 2017. – № 3. – С. 37–50.

5. Сабитов К.Б. *Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием* // Дифференциальные уравнения. – 2010. – № 10. – С. 1468–1478.

STABILITY OF THE SOLUTION OF THE DESIN PROBLEM
FOR THE LAVRENTIEV - BITSADZE EQUATION

V.A. Gushchina

For the homogeneous Lavrentiev-Bitsadze equation it is considered a nonlocal problem in a rectangular region. The solution of the problem is constructed as the sum of a series in eigenfunctions of the corresponding one-dimensional spectral problems. Under certain conditions on the parameters and given functions, we prove the convergence of the constructed series in the class of regular solutions and stability of the solution from the given boundary functions.
Keywords: under perturbation of nonlocal Dezin problem, the Lavrentiev-Bitsadze equation, uniqueness, existence of solution, small denominators, convergence, stability.

УДК 517.53

ВЫДЕЛЕНИЕ ПАР ГАРМОНИК ИЗ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВЫМ ОПЕРАТОРОМ

В.И. Данченко[1], Д.Я. Данченко[2]

1 *vdanch2012@yandex.ru*; Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых
2 *ddanchenko@vlsu.ru*; Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых

Предлагается метод выделения из тригонометрических многочленов $T_n(t)$ сумм двух гармоник с заданными номерами методом амплитудно-фазовых преобразований. Такие преобразования переводят многочлены $T_n(t)$ в подобные им, совершая две простейшие операции — умножение на вещественную константу X и сдвиг на вещественную фазу λ, т.е. $T_n(t) \mapsto X \cdot T_n(t-\lambda)$. Гармоники выделяются амплитудно-фазовым оператором, представляющим собой сложение подобных многочленов.

Ключевые слова: амплитудно-фазовый оператор, оценки гармоник.

Действие амплитудно-фазового оператора (АФО) порядка не выше m на тригонометрический многочлен

$$T_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \tau_k(t), \qquad \tau_k(t) := a_k \cos kt + b_k \sin kt, \qquad n \in \mathbb{N},$$

состоит в следующем:

$$T_n(t) \longmapsto \sum_{j=1}^{m} X_j \cdot T_n\left(t-\lambda_j\right), \qquad X_j, \lambda_j \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

В работах [1], [2] показано, что для любого номера $\mu \geq 1$ найдется АФО, для которого

$$\sum_{j=1}^{m} X_j \cdot T_n\left(t-\lambda_j\right) = \tau_\mu(t) + a_0 \cdot \sum_{j=1}^{m} X_j, \tag{2}$$

где $m = m(n,\mu)$, а $\{X_j\}$, $\{\lambda_j\}$ не зависят от T_n, а зависят лишь от n и μ. Благодаря вещественности этих параметров (2) имеет простой физический смысл: из стационарного сигнала $T_n(t)$ выделяется гармоника $\tau_\mu(t)$ наложением не более m подобных сигналов, отличающихся лишь амплитудами и начальными фазами. Выделение гармоник наложением сигналов (без использования промежуточных спектральных замеров) позволяет эффективно применять АФО для оценок гармоник тригонометрических полиномов. Особенно важным для оценок является построение АФО, у которых все X_k одного знака. С помощью таких АФО в [1], [2], например, найдены точные оценки L_p-норм гармоник через L_p-норму самого многочлена, а в случае неотрицательных полиномов $T_n \not\equiv 0$ установлены точные оценки их коэффициентов через свободный член (обобщение неравенства Фейера для первой гармоники; см. [1]):

$$\sqrt{a_\mu^2 + b_\mu^2} \leq \omega\, a_0 < 2\, a_0, \qquad n = s\mu - 1 \geq 1, \quad \omega := 2\cos\frac{\pi}{s+1}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Оценкам коэффициентов тригонометрических многочленов посвящено много работ (см., например, работы А.С. Белова и С.В. Конягина и обширную библиографию в них). Отметим также, что в отличие от ряда спектральных методов в конструкции АФО интегральные аппараты не применяются; формула (2) имеет чисто арифметический характер, из нее, например, при $a_0 = 0$ получаются арифметические формулы для коэффициентов Фурье:

$$a_\mu = \sum_{j=1}^{m} X_j \cdot T_n\left(-\lambda_j\right), \quad b_\mu = \sum_{j=1}^{m} X_j \cdot T_n\left(\frac{\pi}{2\mu} - \lambda_j\right).$$

В настоящей заметке рассматривается задача построения АФО для выделения двух гармоник в виде

$$\tau_\mu(t) + \tau_\nu(t) + a_0 \cdot \sum_{j=1}^{m} X_j = \sum_{j=1}^{m} X_j \cdot T_n\left(t-\lambda_j\right), \quad 1 \leq \mu < \nu \leq n, \tag{3}$$

и получения точных оценок сумм пар гармоник. Конечно, можно выделить две гармоники, скомбинировав действия двух АФО вида (2), однако, этим методом точные оценки гармоник получить нельзя. Задача оказалась значительно сложней задачи для одной гармоники и в общем случае ее решить не удалось. Найдены решения только для пар $(\mu,\nu) = (1,n)$ и $(\mu,\nu) = (2,n)$. Для некоторых других пар разработаны численные методы построения АФО.

Теорема. *В случае* $(\mu,\nu) = (1,n)$ *имеем* $m = n$ *и*

$$2a_0 - \tau_1(t) - \tau_n(t) = \frac{4}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \sin^2\frac{\lambda_k}{2}\, T_n\left(t-\lambda_k\right), \qquad \lambda_k = \lambda_k^{(1)} = \frac{2\pi k}{n+1}.$$

В случае $(\mu,\nu)=(2,n)$, $n=2s-1$, $s\in\mathbb{N}$, *в формуле* (3) $m=n$, *фазы* $\lambda_k=\lambda_k^{(2)}$ *являются аргументами корней* z_k *следующего многочлена* (*дробь сократима*)

$$G_n(z)=\frac{z(z^{2s+1}+1)\,\sin\varphi+(z^2-1)(z^{2s+1}-1)\,\sin s\varphi}{z^4-2\,z^2\cos\big(\varphi\big)+1},\quad \varphi=\frac{\pi}{2s+1}.$$

Многочлен G_n *имеет ровно* n *различных корней* $e^{i\lambda_k}$, *лежащих на единичной окружности. Множители* X_k *все отрицательны, их сумма равна* $(-2\cos\varphi)$.

Следствие. *Для неотрицательного многочлена* $T_n\not\equiv 0$ *при всех* t *имеем*

$$\tau_1(t)+\tau_n(t)\le 2a_0,\qquad \tau_2(t)+\tau_n(t)\le 2a_0\cos\frac{\pi}{2s+1}\quad (n=2s-1).$$

Оценки точны. Они превращаются в равенства при $t=0$ *на многочленах*

$$T_n^*(t)=\prod_{k=1}^{n}\sin^2\left(\frac{t+\lambda_k^{(1,2)}}{2}\right).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (задание No 1.574.2016/1.4).

Литература

1. Danchenko V. I., Vasilchenkova D. G. *Extraction of harmonics from trigonometric polynomials by amplitude and phase operators* // arXiv:1606.08716v1 [math.CA], 28 Jun. 2016. – P. 1-19.

2. Васильченкова Д. Г., Данченко В. И. *Фильтрация тригонометрических многочленов амплитудно-фазовыми операторами* // Межд. конф. по дифф. уравнениям и динам. системам. Тезисы докладов. Суздаль, 8-12 июль 2016. – С. 40-41.

EXTRACTION OF PAIRS OF HARMONICS FROM TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS BY AMPLITUDE AND PHASE OPERATORS

V.I. Danchenko, D.Ya. Danchenko

In this paper we propose a method for extracting sum of two harmonics by amplitude and phase transformation of trigonometric polynomials $T_n(t)$. *These transformations use two the simplest operations — multiplication by a real constant and phase shift — to obtain polynomials similar to the initial ones:* $T_n(t)\mapsto X\cdot T_n(t-\lambda)$. *A harmonic is extracted by an amplitude and phase operator that simply overlays a finite number of such polynomials.*

Keywords: amplitude and phase operator, estimates of harmonics