Литература

1. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. *Недифференцируемая оптимизация.* – М.: Наука, 1981. – 384 с.

2. Зуховицкий С. И., Крейн М. Г. *Замечание об одном возможном обобщении теорем А. Хаара и А.Н. Колмогорова* // УМН. – 1950. – Т. 5. – Вып. 1 (35). – С. 217-229.

ON UNIFORM APPROXIMATION OF MULTI-VALUED MAP, GIVEN BY TWO SEGMENT FUNCTIONS, BY POLYNOMIAL VECTOR FUNCTION

A.V. Makarov, S.I. Dudov

The problem of uniform approximation of a multi-valued map, given by Cartesian product of two segment functions, by polynomial vector function is considered. The necessary and sufficient conditions for the solution of the problem are formulated. They are a generalization of the known result of S.I. Zukhovitsky and M.G. Krein.

Keywords: uniform approximation, multi-valued map, polynomial vector-function, subdifferential.

УДК 514.822

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА, РОДСТВЕННЫЕ ПРИНЦИПУ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Р.В. Макаров[1]

1 *ruva2007@ya.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В статье рассматривается классическое неравенство Гейзенберга. Нами получены модификации этого неравенства.

Ключевые слова: принцип неопределенности Гейзенберга, интегральные неравенства.

В 1927 г. Вернер Гейзенберг открыл принцип неопределенности. Сейчас это – один из фундаментальных принципов в квантовой механике, устанавливающий предел точности одновременного определения пары характеризующих систему квантовых наблюдаемых, описываемых некоммутирующими операторами (например, координаты и импульса, тока и напряжения, электрического и магнитного поля). Более доступно он звучит так: чем точнее измеряется одна характеристика частицы, тем менее точно можно измерить вторую.

Принцип неопределенности может быть записан в виде:

$$\triangle x \cdot \triangle p \geqslant \hbar/2,$$

где $\triangle x$ – величина среднеквадратического отклонения координаты, $\triangle p$ – среднеквадратическое отклонение импульса, $\hbar$ – постоянная Планка.

В общем случае принцип неопределенности применим не только к координате и импульсу (как это показал Гейзенберг), но и к парам сопряженных переменных.

Неравенство Гейзенберга имеет фундаментальную важность во многих областях математического анализа и математической физики, и интенсивно изучалось с момента его открытия. Богатая история связана с оригинальным неравенством, которое было расширено и уточнено во многих направлениях.

Когда требуется точная количественная оценка принципа неопределенности, то наиболее используемая из них называется неравенством Гейзенберга. Появляется оно в работе Гейзенберга, посвященной теоретическому анализу принципа неопределенности. В этой работе оно получило недостаточное математическое обоснование, это упущение было исправлено позднее Кеннардом и Вейлом.

Классическое неравенство Гейзенберга выглядит таким образом:

Теорема 1. *Для* $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *и* $\forall a, b \in \mathbb{R}$ *верно соотношение:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (x-a)^2 |f(x)|^2\, dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} (\xi - b)^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \geqslant \frac{\|f\|_4^2}{16\pi^2} \cdot n^2 .$$

Приведем еще одно утверждение.

Формулировка Вейла принципа неопределенности. *Для любой функции* $f \in S(\mathbb{R})$ *при условии* $\|f\|_2 = 1$ *верно соотношение:*

$$-\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \ln(|f(x)|^2)\, dx - \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 \ln(|\hat{f}(\xi)|^2)\, d\xi \geqslant \ln \frac{e}{2} .$$

Эта теорема имеет непосредственную связь с физическими величинами, а именно с энтропией Шеннона:

$$E(\rho) = -\int \rho(x) \ln \rho(x)\, dx .$$

Нами обоснованы следующие неравенства, близкие принципу неопределенности Гейзенберга.

Теорема 2. *Для любой функции* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *с компактным носителем* $\operatorname{supp} f \in \mathbb{R}$ *выполняются следущие неравенства:*

$$\left\| \frac{f(x)}{x^2+1} \right\|_2 + \frac{\pi}{2} \|\xi |\hat{f}(\xi)|\|_2 \geqslant \int_{\mathbb{R}} \frac{2x \operatorname{arctg} x - 1}{(x^2+1)^2} \cdot |f(x)|^2\, dx,$$

$$\left\| \frac{f(x)}{4x(x+1)^2} \right\|_2 + \frac{\pi}{2} \|\xi |\hat{f}(\xi)|\|_2 \geqslant \int_{\mathbb{R}} \frac{(3x+1) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}}{4x^{3/2}(x+1)^2} \cdot |f(x)|^2\, dx.$$

Теорема 3. *Пусть* $a, b, k \in \mathbb{R}$. *Тогда для любой функции* $f \in L^2(\mathbb{R})$, *удовлетворяющей условию* $\|f\|_2 = 1$, *справедливо неравенство:*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{k(x-a)^2} |f(x)|^2\, dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{k(\xi-b)^2} |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi \geqslant e^{k/2\pi} .$$

Выражаю благодарность своему научному руководителю проф. Ф.Г. Авхадиеву за постановку задачи и полезные замечания.

Литература

1. Folland G., Sitaram A. *The uncertainty principle: a mathematical survey* // J. Fourier Anal. Appl. – 1997. – № 3. – P. 207-238.

2. Beckner W. *Pitt's inequality and the uncertainty principle* // Proc. Amer Math. Soc. – 1995. – № 123. – P. 1897-1905.

INTEGRAL INEQUALITIES RELATED TO UNCERTAINTY PRINCIPLE OF HEISENBERG

R.V. Makarov

We describe the classical Heisenberg inequality and its modifications. Also we obtain some new similar estimates and inequalities.

Keywords: uncertainty principle, integral inequality.

УДК 517.95

О ВЗАИМОСВЯЗИ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Е.А. Мазепа[1]

1 *elena.mazepa@volsu.ru*; Волгоградский государственный университет

В данной работе, используя достаточно новый подход к постановке краевых задач на произвольном некомпактном римановом многообразии M, основанный на введении классов эквивалентных на M функций, устанавливаем зависимость между разрешимостью краевых и внешних краевых задач для уравнения Пуассона на M в классе неограниченных непрерывных функций.

Ключевые слова: уравнение Пуассона, краевая и внешняя краевая задачи, некомпактные римановы многообразия, задача Дирихле.

В последние годы опубликовано большое количество работ, посвященных вопросам разрешимости различных краевых задач для гармонических функций, для решений стационарного уравнения Шредингера, для некоторых других однородных линейных и квазилинейных эллиптических уравнений. При этом исследования неоднородных эллиптических уравнений носят единичный характер и посвящены преимущественно изучению асимптотического поведения решений этих уравнений [1]- [2], а не вопросам разрешимости для них краевых задач.

В настоящей работе предлагаем, используя достаточно новый подход к постановке краевых задач на некомпактных римановых многообразиях, основанный на введении понятия классов эквивалентных на многообразии M непрерывных функций (в том числе неограниченных), исследовать вопросы разрешимости краевых и внешних краевых задач для уравнения Пуассона

$$\Delta u = g(x), \tag{1}$$

где функция $g(x) \in C^{\gamma}(\Omega)$ для любого подмножества $\Omega \subset\subset M$, $0 < \gamma < 1$.