УДК 517.958

ПОСТРОЕНИЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ТРЁХМЕРНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

М.Ф. Кулагина[1], Р.А. Румянцев[2]

1 *kulagina_mf@mail.ru*; Академический лицей им. Н.И.Лобачевского
2 *rarumyantsev@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В настоящей работе с помощью обобщённого дискретного преобразования Фурье строятся почти-периодические в смысле Бора решения задач Дирихле и Неймана для полупространства и пространственного слоя, задач о свободном колебании большой мембраны, колебании тонкой упругой пластины, теплопроводности в бесконечной среде в отсутствии источников. Все решения получены в виде абсолютно сходящихся рядов Фурье, коэффициенты которых выражаются через заданные функции.

Ключевые слова: обобщённое дискретное преобразование Фурье, задача Дирихле, задача Неймана, полупространство, пространственный слой, колебания, теплопроводность.

В работах [1]- [3] с помощью ОДФ, введённого и изученного в [4] и [5], построены почти-периодические в смысле Бора решения некоторых задач математической физики для функций двух переменных, то есть плоских задач.

В настоящей работе строятся почти-периодические в смысле Бора решения задач Дирихле и Неймана для полупространства и пространственного слоя, задач о свободном колебании большой мембраны, колебании тонкой упругой пластины, теплопроводности в бесконечной среде в отсутствии источников. Решение этих задач, но в других классах функций, приводится почти во всех учебниках и учебных пособиях по математической физике.

Будем говорить, что $f(x,y) \in \prod_w$, если

$$f(x,y) = f_0 + \sum_{\mu^2+\lambda^2\neq 0} f_{\lambda\mu} e^{i\lambda x} e^{i\mu y}$$

и $\{f_{\lambda\mu}\} \in l_1$.

Если последовательность $\{f_{\lambda\mu}(z)\}$ такова, что существует $\{a_{\lambda\mu}\}$ такая, что $|f_{\lambda\mu}(z)| \leq a_{\lambda\mu}$, то будем говорить, что

$$\Phi(x,y,z) = \sum_{\lambda,\mu} f_{\lambda,\mu}(z) e^{i\lambda x} e^{i\mu y} \in \prod_w^z$$

Задача Дирихле для слоя

Надо найти функцию $\Phi(x,y,z) \in \prod_w^z$, которая:

1. определена и непрерывна в слое $0 \leq z \leq h$;
2. удовлетворяет уравнению Лапласа $\triangle\Phi = 0$ в $0 < z < h$;
3. удовлетворяет на границах условиям $\Phi(x,y,z)|_{z=0} = f(x,y), \Phi(x,y,z)|_{z=h} = g(x,y)$.

Если $f(x,y) \in \prod_w$ и $g(x,y) \in \prod_w$, то единственное решение этой задачи даётся формулой

$$\Phi(x,y,z) = f_0 + \frac{g_0 - f_0}{h} z + \sum_{\mu^2+\lambda^2 \neq 0} \left(g_{\lambda\mu} \frac{e^{nz} - e^{-nz}}{e^{nh} - e^{-nh}} - f_{\lambda\mu} \frac{e^{n(z-h)} - e^{-n(z-h)}}{e^{nh} - e^{-nh}} \right) e^{i\lambda x} e^{i\mu y}$$

где $n = \sqrt{\mu^2 + \lambda^2}$. Рассмотрена также задача Дирихле для полупространства.

Задача Неймана для полупространства

Надо найти функцию $\Phi(x,y,z) \in \prod_w^z$, которая:

1. определена и непрерывна в $z \geq 0$;
2. удовлетворяет уравнению Лапласа $\triangle\Phi = 0$ в $z > 0$;
3. производная принимает на границе заданные значения:

$$\frac{\partial\Phi(x,y,z)}{\partial z}|_{z=0} = f(x,y).$$

Для разрешимости задачи Неймана необходимо, чтобы $f_0 = 0$.Тогда решение $\Phi(x,y,z)$ равномерно стремящиеся к нулю по x и y при $z \to +\infty$ даётся формулой:

$$\Phi(x,y,t) = -\sum_{\mu^2+\lambda^2 \neq 0} \frac{1}{n} f_{\lambda\mu} e^{-nz} e^{i\lambda x} e^{i\mu y},$$

где $n = \sqrt{\mu^2 + \lambda^2}$.

Задача о теплопроводности в бесконечной среде

Надо найти функцию изменения температуры Q(x,y,t), которая удовлетворяет начальному условию $Q(x,y,z)|_{t=0} = f(x,y) \in \prod_w$ и дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \upsilon \triangle_1 Q,$$

где $\triangle_1$ – оператор Лапласа по x и y, υ – коэффициент теплопроводности.

Решение задачи в классе $\prod_w^t$ даётся формулой

$$Q(x,y,t) = f_0 + \sum_{\mu^2+\lambda^2 \neq 0} f_{\lambda\mu} e^{-lt} e^{i\lambda x} e^{i\mu y},$$

где $l = \upsilon(\mu^2 + \lambda^2)$.

Задача о свободных колебаниях очень большой мембраны.

Смещение мембраны $z = z(x,y,t)$ в случае свободных колебаний описывается уравнением:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \triangle_1 z$$

с начальными условиями $z(x,y,t)|_{t=0} = f(x,y)$, $\frac{\partial z}{\partial t}|_{t=0} = g(x,y)$. В уравнении $\triangle_1$ – оператор Лапласа по x и y.

Если $f(x,y) \in \prod_w$ и $g(x,y) \in \prod_w$, то единственное решение этой задачи даётся формулой:

$$z(x,y,t) = \sum_{\mu^2+\lambda^2\neq 0} (f_{\lambda\mu}\cos(mt) + g_{\lambda\mu}\sin(mt))e^{i\lambda x}e^{i\mu y},$$

где $m = c\sqrt{\mu^2+\lambda^2} \geq \alpha > 0$.

Задача о свободных колебаниях тонкой упругой пластины.

Здесь для определения смещения $\omega = \omega(x,y,t)$ точки (x,y) надо решить уравнение:

$$D\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)^2\omega + 2\rho h\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} = 0$$

с начальными условиями $\omega(x,y,t)|_{t=0} = f(x,y)$, $\frac{\omega}{\partial t}|_{t=0} = g(x,y)$.

Через D обозначен коэффициент жесткости пластины, который связан с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона σ формулой $D = \frac{2Eh^2}{3(1-\sigma^2)}$, h-толщина пластины.

Если $f(x,y) \in \prod_w$ и $g(x,y) \in \prod_w$, то единственное решение этой задачи класса $\prod_w^t$ даётся формулой:

$$\omega(x,y,t) = \sum_{\mu^2+\lambda^2\neq 0} (f_{\lambda\mu}\cos(kt) + \frac{1}{k}g_{\lambda\mu}\sin(kt))e^{i\lambda x}e^{i\mu y},$$

где $k = (\mu^2+\lambda^2)\sqrt{\frac{D}{2ph}} \geq \alpha > 0$.

Как правило, все эти задачи решаются с помощью преобразования Фурье, и решения их записываются в виде интегралов Фурье, что вызывает большие вычислительные трудности. В данной работе все решения задач получены в виде абсолютно сходящихся рядов Фурье, коэффициенты которых выражаются через заданные функции.

Литература

1. Кулагина М.Ф. *Построение почти-периодических решений некоторых краевых задач о распространении поверхностных волн* // Изв. ВУЗов. Математика. – 2001. – №9. – С. 38-42.

2. Кулагина М.Ф., Иванова В.И. *Первая основная задача теории упругости для области, состоящей из полосы и полуплоскости* // Вестник СамГТУ. Серия “Физ-мат науки”. – Самара: Изд-во СамГТУ. – 2003. – С. 45-51.

3. Кулагина М.Ф., Микишанина Е.А. *Построение почти-периодических решений некоторых систем дифференциальных уравнений* // Математические заметки СВФУ. – 2015. – Т. 22. – № 3(87). – С. 11-20.

4. Кулагина М.Ф. *О некоторых бесконечных системах с разностными индексами* // Изв.ВУЗов. Математика. – 1992. – № 3. – С. 18-23.

5. Кулагина М.Ф. *Об интегральных уравнениях в средних значениях в пространствах почти-периодических функций* // Изв. ВУЗов. Математика. – 1993. – № 8. – С. 19-29.

CONSTRUCTION OF ALMOST PERIODIC SOLUTIONS TO SOME THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS

M.F. Kulagina, R.A. Rumyancev

By using the generalized discrete Fourier transforms, they are constructed almost-periodic in the sense of Bohr solutions of the Dirichlet and Neumann problems for half-space and spatial layer problems on the free oscillation of a large membrane vibration of a thin elastic plate, heat conduction in an infinite medium in absence of sources. All solutions of the problems are obtained in the form of absolutely convergent Fourier series whose coefficients are expressed through the given functions.

Keywords: generalized discrete Fourier transform, Dirichlet problem, Neumann problem, half-space, spatial layer, fluctuations, thermal conductivity.

УДК 517.923

О РЕЖИМАХ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ДУФФИНГА

А.Ф. Курин[1]

1 *afkurin@mail.ru*; Воронежский государственнvй университет

В статье доказывается существование режимов хаотических колебаний в решении неоднородного уравнения Дуффинга без затухания с малой нелинейностью и малой амплитудой внешней периодической силы. Выводится соотношение, связывающее параметры уравнения, которые обеспечивают настройку осциллятора Дуффинга на указанные режимы.

Ключевые слова: метод усреднения, осциллятор, бифуркации.

В литературе (см., напр., [1, 2]) приведены примеры систем, в которых имеются режимы хаотических колебаний. В настоящей работе такие колебания описаны для хорошо известного квазилинейного варианта уравнения Дуффинга.

Неоднородное без затухания при наличии линейной составляющей упругой силы уравнение Дуффинга

$$\ddot{z} + \Omega^2 z = \varepsilon \nu z^3 + \varepsilon a \cos\Omega_1 t = \varepsilon\varphi(z,t), \tag{1}$$

где $\Omega^2 > 0$, $a > 0$, $\Omega_1 > 0$, ν – постоянные величины, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, будем интегрировать методом усреднения, используя второе приближение метода [3, 4]. Для этого воспользуемся переменными ван дер Поля (b – амплитуда, ψ – фаза, при этом $z = b\cos\psi$), для которых из (1) получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{b} &= -\frac{\varepsilon}{\Omega}(\nu b^3 \cos^3\psi \sin\psi + a\cos\Omega_1 t \sin\psi), \\ \dot{\psi} &= \Omega - \frac{\varepsilon}{\Omega b}(\nu b^3 \cos^4\psi + a\cos\Omega_1 t \cos\psi). \end{aligned} \tag{2}$$