Отметим, что аналогичная теорема была доказана для кусочно-линейных решений в работе [2] с оценкой погрешности $O(h^{1/4})$.

Литература

1. Клячин А. А. *Приближение минимальных поверхностей кусочно-полиномиальными функциями* // Записки семинара «Сверхмедленные процессы». – 2009. – Т. 6. – С. 198-206.

2. Клячин А. А., Гацунаев М. А. *О равномерной сходимости кусочно-линейных решений уравнения минимальной поверхности* // Уфимский математический журнал. – 2014. – Т. 6. – № 3. — С. 3-16.

ON CONVERGENCE OF PIECEWISE POLYNOMIAL SOLUTIONS
OF THE MINIMAL SURFACE EQUATION

A.A. Klyachin, A.G. Panchenko

The concept of a piecewise-quadratic approximate solution of the minimal surface equation, defined over a triangulated domain, is considered. We study the problem of approximating the area functional in a given class of surfaces and the convergence of such solutions, as the fineness of the triangular grid tends to zero. In particular, the uniform convergence of piecewise-quadratic solutions is proved and the estimate of the rate of that convergence in terms of the step of the h *grid is indicated.*

Keywords: piecewise quadratic function, area of a surface, the approximation of functional, triangulation, minimal surface.

УДК 519.642

ЭФФЕКТ КЛАСТЕРИЗАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ ТОЧЕК ФУНКЦИОНАЛА НЕВЯЗКИ В УСЛОВНО–КОРРЕКТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ

М.Ю. Кокурин[1]

1 *kokurinm@yandex.ru*; Марийский государственный университет

Устанавливается, что стационарные точки конечномерного функционала невязки условно корректной обратной задачи, имеющей гельдерову оценку модуля непрерывности обратного оператора, располагаются вблизи искомого решения обратной задачи.

Ключевые слова: гильбертово пространство, обратные задачи, условно корректные задачи, дифференцируемый оператор.

В работе рассматриваются нелинейные обратные задачи, моделируемые операторными уравнениями

$$F(u) = f, \ u \in D, \tag{1}$$

где $F : H_1 \to H_2$ — оператор прямой задачи, предполагаемый инъективным и дифференцируемым по Фреше на множестве $D \subset H_1$; H_1, H_2 — гильбертовы пространства. В приложениях множество D определяет априорные ограничения на искомый элемент $u^* \in H_1$. Предполагается, что вместо точных данных в (1) доступны аппроксимации $\widetilde{f}$, $\widetilde{F}$ такие, что

$$\|\widetilde{f} - f\|_{H_2} \le \delta; \ \|\widetilde{F}(u) - F(u)\|_{H_2} \le h, \ \|\widetilde{F}'(u) - F'(u)\|_{L(H_1,H_2)} \le h \ \forall u \in D. \tag{2}$$

Исследуется конечномерный вариант метода квазирешений для задачи (1). Выберем семейство конечномерных подпространств $\{\mathscr{H}_N\}_{N=1}^{\infty} \subset H_1$ таких, что

$$1 \le \dim\mathscr{H}_N < \dim\mathscr{H}_{N+1}, \ \mathscr{H}_N \subset \mathscr{H}_{N+1}, \ N = 1,2,\ldots; \ \overline{\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathscr{H}_N} = H_1. \tag{3}$$

Обозначим $D_N = D \cap \mathscr{H}_N$ и сопоставим (1) конечномерную экстремальную задачу

$$\min\{\widetilde{J}(u) : u \in D_N\}, \ \widetilde{J}(u) = \|\widetilde{F}(u) - \widetilde{f}\|_{H_2}^2. \tag{4}$$

Без потери общности можем считать, что $0 \in D$, тогда $0 \in D_N$ для всех номеров $N \ge 1$. Нам потребуются следующие условия.

Условие 1. *Имеет место степенная оценка условной устойчивости задачи (1) с показателем $1 \le p \le 2$ на искомом решении $u^* \in D$, $F(u^*) = f$:*

$$\|F(u) - F(u^*)\|_{H_2} \ge m\|u - u^*\|_{H_1}^p \ \forall u \in D \ (m > 0).$$

Условие 2. *Множество $D \subset H_1$ выпукло, замкнуто и ограничено, $0 \in D$; производная F' удовлетворяет условию Липшица*

$$\|F'(u) - F'(v)\|_{L(H_1,H_2)} \le L\|u - v\|_{H_1} \ \forall u, v \in D.$$

Из условия 2 следует, что с некоторой константой M выполняется неравенство:

$$\|F(u) - F(v)\|_{H_2} \le M\|u - v\|, \ \|F'(u)\|_{L(H_1,H_2)} \le M \ \forall u, v \in D.$$

Пусть точка $u_N^* \in D_N$ удовлетворяет необходимому условию минимума в задаче (4):

$$(\widetilde{J}'(u_N^*), u_N^* - u)_{H_1} \le 0 \ \forall u \in D_N.$$

Ниже устанавливается оценка для $\|u_N^* - u^*\|_{H_1}$. Пусть P_{D_N} есть оператор метрического проектирования из H_1 на D_N. Обозначим $\varepsilon_N = \|u^* - P_{D_N}(u^*)\|_{H_1}$. Величина ε_N характеризует качество аппроксимации множества D его конечномерным сечением D_N.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия 1, 2 и (2), (3). Предположим, что при $p = 2$ выполнено условие $L/m < 1$, а в случае $1 \le p < 2$ справедливо соотношение*

$$\|u_N^* - u^*\|_{H_1} < \frac{1}{M}\left(\frac{m^{2/p}}{2L}\right)^{p/(2-p)}.$$

Тогда с подходящей константой $C = C(L, m)$ имеет место оценка

$$\|u_N^* - u^*\|_{H_1} \le \left(\frac{C}{m}\right)^{1/p}(M\varepsilon_N + \delta + h^2)^{1/p}.$$

В случае $1 \le p < 2$ теорема 1 утверждает, что если величины ε_N, δ, h достаточно малы, то все стационарные точки задачи (3), (4), лежащие в шаре

$$B_N(u^*; m, L) = \left\{ u \in \mathscr{H}_N : \|u - u^*\|_{H_1} \le \frac{1}{M}\Big(\frac{m^{2/p}}{2L}\Big)^{p/(2-p)} \right\},$$

реально находятся от u^* на расстоянии порядка $O((\varepsilon_N + \delta + h^2)^{1/p})$. Тем самым, при малых ε_N, δ, h возможная многоэкстремальность задачи (3), (4) оказывается несущественной, если ограничиться указанным шаром. В частности, любая стационарная предельная точка из $B_N(u^*; m, L)$, порожденная произвольным итерационным процессом конечномерной минимизации, служит хорошим приближением для u^*. В случае $p = 2$ при выполнении условия $L/m < 1$ дополнительных ограничений на u_N^* нет, т.е. можно положить $B_N(u^*; m, L) = \mathscr{H}_N$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16–01–00039а), поддержана Министерством образования и науки РФ в рамках государственного задания (проект 1.5420.2017/8.9).

CLUSTERING EFFECT FOR STATIONARY POINTS OF DISCREPANCY FUNCTIONAL IN CONDITIONALLY WELL–POSED INVERSE PROBLEMS

M.Yu. Kokurin

We prove that stationary points of finite dimensional discrepancy functional related to a conditionally well–posed inverse problem with the Holder type estimate for the continuity modulus of the inverse operator, belong to a small neighborhood of the solution to the inverse problem.

Keywords: Hilbert space, inverse problems, conditionally well–posed problems, differentiable operator.

УДК 517.983.54

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ КОШИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА

М.М. Кокурин[1]

1 *kokurin@nextmail.ru*; Марийский государственный университет, физико–математический факультет

Устанавливаются степенные оценки скорости сходимости разностных методов решения некорректных задач Коши первого и второго порядка в гильбертовом пространстве. Для этих оценок найдены близкие друг к другу необходимые и достаточные условия в терминах показателя истокопредставимости искомого решения.

Ключевые слова: некорректная задача Коши, гильбертово пространство, разностная схема, скорость сходимости.

Изучаются некорректные задачи Коши для дифференциально–операторных уравнений первого и второго порядка:

$$\dot{x}(t) = Ax(t),\ t \in [0, T]; \quad x(0) = f \in D(A); \tag{1}$$