

УДК 517.5

СТУПЕНЧАТАЯ МАСШТАБИРУЮЩАЯ ФУНКЦИЯ НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ И АЛГОРИТМ ЕЕ ПОСТРОЕНИЯ

Ю.С. Крусс¹¹ krussus@gmail.com; СГУ имени Н.Г. Чернышевского

В работе приводится алгоритм построения ступенчатой масштабирующей функции с компактным носителем на локальных полях положительной характеристики.

Ключевые слова: кратномасштабный анализ, масштабирующая функция, локальное поле положительной характеристики.

Локальное поле $F^{(s)}$ положительной характеристики p изоморфно пространству бесконечных в обе стороны последовательностей, где лишь конечное число членов с отрицательными номерами имеют ненулевое значение: $(\dots, \mathbf{0}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \dots)$, $\mathbf{x}_i \in GF(p^s)$, $GF(p^s)$ – конечное поле [1]. Нулевой элемент поля $GF(p^s)$ имеет вид $\mathbf{0} = (0_0, 0_1, \dots, 0_{s-1})$. Окрестностями нулевого элемента поля $F^{(s)} - \mathbf{0} = (\dots, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots)$, являются множества $F_n^{(s)}$ ($F_n^{(s)} \subset F_{n-1}^{(s)}$):

$$F_n^{(s)} = \{a = (\dots, \mathbf{0}, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}, \dots) : \mathbf{a}_j \in GF(p^s)\}, n \in \mathbb{Z}.$$

В 2004 году в работе Н. Jiang, D. Li, N. Jin [2] появилось определение КМА на локальных полях положительной характеристики.

Определение 1. [2] Пусть $F^{(s)}$ локальное поле положительной характеристики. Совокупность замкнутых подпространств $\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in L_2(F^{(s)})$ называется КМА в $L_2(F^{(s)})$, если выполнены следующие аксиомы:

$$A1) V_n \subset V_{n+1};$$

$$A2) \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n = L_2(F^{(s)});$$

$$A3) \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} V_n = \{0\};$$

$$A4) f(x) \in V_n \Leftrightarrow f(\mathcal{A}x) \in V_{n+1}, \mathcal{A} - \text{оператор растяжения};$$

A5) существует функция $\varphi \in V_0$ такая, что система сдвигов $\{\varphi(x-h)\}_{h \in H_0}$ образует ортонормированный базис в V_0 , где H_0 – множество сдвигов.

Функция φ из аксиомы A5 называется масштабирующей функцией для данного КМА. Пусть φ масштабирующая функция, тогда из аксиомы A1 следует, что

$$\varphi(x) = \sum_{h \in H_0} c_h \varphi(\mathcal{A}x-h), \sum_{h \in H_0} |c_h|^2 < +\infty, \quad (1)$$

где $c_h \in \mathbb{C}$. Уравнение (1) называется масштабирующим уравнением.

Теорема 1. [2] Пусть $F^{(s)}$ – локальное поле положительной характеристики p , p – простое число. Если система замкнутых подпространств $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ в $L_2(F^{(s)})$ удовлетворяет аксиомам A1-A5 КМА и существуют интегрально-периодические функции $m^{(1)}, \mathbf{1} \in GF(p^s), \mathbf{1} \neq \mathbf{0}$, такие что матрица $M(\chi) = [m^{(1)}(\chi \mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_0})]$ ($\mathbf{1}, \mathbf{a}_0 \in GF(p^s), \mathbf{r}_0$ – функция Радемахера) унитарна, то существует ортонормированный базис вейвлетов $\psi^{(1)}(\mathcal{A}^n x-h), \mathbf{1} \in GF(p^s), \mathbf{1} \neq \mathbf{0}, h \in H_0$, в $L_2(F^{(s)})$, где $\hat{\psi}^{(1)}(\chi) = m^{(1)}(\chi) \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1})$, $\mathbf{1} \in GF(p^s), \mathbf{1} \neq \mathbf{0}, m^{(0)}$ – маска масштабирующего уравнения.

В [2] предполагается, что φ нам известна. Стоить отметить, что поиск подходящей функции φ является отдельной задачей.

В 2012 году В. Behera и Q. Jahan [3] опубликовали необходимое и достаточное условия для того, чтобы функция $\varphi \in L_2(F^{(s)})$ порождала КМА.

Теорема 2. [3] Обозначим через $U = \{\mathbf{r}_1^{\mathbf{a}_1} \dots \mathbf{r}_v^{\mathbf{a}_v}, \mathbf{a}_j \in GF(p^s), v \in \mathbb{N}_0\}$, \mathbf{r}_j – функции Радемахера. Функция $\varphi \in L_2(F^{(s)})$ удовлетворяет аксиоме А5 КМА тогда и только тогда, когда для любых $\chi \in F_1^{(s)\perp}$

$$\sum_{\xi \in U} |\hat{\varphi}(\chi\xi)|^2 = 1, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} |\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-j})| = 1, \quad \text{для п.в. } \chi \in X$$

и существует интегрально-периодическая функция $m^{(0)}(\chi) \in L_2(F_1^{(s)\perp})$ такая, что для п.в. $\chi \in X$ справедливо равенство $\hat{\varphi}(\chi) = m^{(0)}(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})$.

В 2014 году С.Ф. Лукомский и А.М. Водозазов [1, 4] предложили другой подход к локальным полям положительной характеристики. Они рассматривают локальное поле $F^{(s)}$ положительной характеристики p как линейное пространство над конечным полем $GF(p^s)$. При этом произведение элемента $a \in F^{(s)}$ на элемент $\lambda \in GF(p^s)$ определяется покоординатно.

В [4] установлена связь между локальными полями $F^{(s)}$ положительной характеристики и группами Виленкина G . При $s = 1$ аддитивная группа $F^{(1)+}$ локального поля $F^{(s)}$ положительной характеристики p есть группа Виленкина с постоянной образующей последовательностью $p_n = p$. А при $s > 1$ аддитивная группа $F^{(s)+}$ изоморфна произведению групп Виленкина [1].

Обозначим через $\mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$ множество ступенчатых функций $f \in L_2(F^{(s)})$ таких, что $\text{supp } f \subset F_{-N}^{(s)}$ и f постоянна на множествах вида $F_M^{(s)} + g$.

Для функций s компактным носителем, масштабирующее уравнение (1) содержит сумму с конечным числом слагаемых.

$$\varphi(x) = \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} c_h \varphi(\mathcal{A}x + h), \quad (2)$$

где

$$H_0^{(N)} = \{x \in F^{(s)} : x = \mathbf{a}_{-1}g_{-1} + \mathbf{a}_{-2}g_{-2} + \dots + \mathbf{a}_{-N}g_{-N}, N \in \mathbb{N}, \mathbf{a}_{-j} \in GF(p^s)\}.$$

Уравнение (2) может быть записано в виде

$$\hat{\varphi}(\chi) = m^{(0)}(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}),$$

где $m^{(0)}(\chi) = \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \overline{c_h(\chi\mathcal{A}^{-1}, h)}$ – маска уравнения (2).

В [1] был предложен алгоритм построения масштабирующей функции из класса $\mathfrak{D}_M(F_{-1}^{(s)})$, с дополнительным ограничением: абсолютные значения преобразования Фурье масштабирующей функции это 0 либо 1. В 2016 году в [5] данный алгоритм был обобщен для функций из класса $\mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$, кроме того удалось избавиться от ограничения на абсолютные значения преобразования Фурье, которые теперь могут принимать значения из $[0, 1]$. Изложим алгоритм построения ступенчатой масштабирующей функции с компактным носителем на локальных полях положительной характеристики.

Шаг 1. Выберем простое число p и зафиксируем. Построим N -валидное дерево T .

Определение 2. [5] Пусть $F^{(s)}$ – локальное поле положительной характеристики p , N – натуральное число. Построим дерево T , удовлетворяющее следующим условиям:

1) Каждая вершина представляет собой элемент конечного поля $GF(p^s)$, т.е. имеет вид: $\mathbf{a}_i = (a_i^{(0)}, a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(s-1)})$, $a_i^{(j)} = \overline{0, p-1}$.

2) Корень и все вершины вплоть до $N-1$ -го уровня имеют значение равное нулевому элементу поля $GF(p^s)$: $\mathbf{0} = (0^{(0)}, 0^{(1)}, \dots, 0^{(s-1)})$.

3) Дерево содержит всевозможные пути $(\mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_{k+N})$, $\mathbf{a}_k \in GF(p^s)$ длины $N-1$, причём каждый из них встречается только один раз. При этом рассматриваем только те пути, которые идут от вершин большего уровня к вершинам меньшего уровня.

Такое дерево называется N -валидным деревом на локальном поле $F^{(s)}$ положительной характеристики p .

Шаг 2. По дереву T строим новое дерево \tilde{T} . Каждая вершина дерева \tilde{T} представляет собой N -мерный вектор элементов поля $GF(p^s)$: $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1)$. Строятся эти вершины следующим образом: если в дереве T с вершины \mathbf{a}_N начинался путь из N элементов в направлении к корню $\mathbf{a}_N \rightarrow \mathbf{a}_{N-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{a}_1$, то в новом дереве \tilde{T} образуем вершину, которая имеет значение, равное N -мерному вектору $(\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1)$. Таким образом, корнем дерева \tilde{T} является N -мерный вектор $\mathbf{0} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$, составленный из нулевых элементов поля $GF(p^s)$. Вершины 1-го уровня дерева \tilde{T} представляют собой N -мерные векторы, у которых на всех местах, кроме первого, стоят нулевые элементы поля $GF(p^s)$: $(\mathbf{a}_i, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$, \mathbf{a}_i – какая-то вершина N -го уровня дерева T . Вершины 2-го уровня дерева \tilde{T} представляют собой N -мерные векторы: $(\mathbf{a}_{i_2}, \mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$, где \mathbf{a}_{i_2} и \mathbf{a}_{i_1} – какие-то связанные друг с другом вершины дерева T уровней $N+1$ и N соответственно. Причем в данном примере $\mathbf{a}_{i_1} \neq \mathbf{0}$, а \mathbf{a}_{i_2} уже может быть нулевым элементом поля $GF(p^s)$. Если мы обозначим через H высоту дерева T , а через \tilde{H} высоту дерева \tilde{T} , то очевидно $\tilde{H} = H - N + 1$.

Шаг 3. Теперь преобразуем дерево \tilde{T} к графу Γ , добавив некоторое количество новых ребер по следующим правилам:

1) достраивать ребра можно только из вершин более высокого уровня к вершинам более низкого уровня,

2) вершину $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1)$ дерева \tilde{T} можно связывать только с вершинами, имеющими вид $(\mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0)$, то есть первые $(N-1)$ элементов которых совпадают с последними $(N-1)$ элементами вершины \mathbf{A} .

Вершины, с которыми вершина \mathbf{A}_N связана, мы будем обозначать $(\mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1, \tilde{\mathbf{a}}_0)$. То есть $\mathbf{a}_0 \in \{\tilde{\mathbf{a}}_0\}$ тогда и только тогда, когда вершина \mathbf{A}_N связана с вершиной $(\mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0)$ в графе Γ .

Шаг 4. Если вершина $(\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1)$ в графе Γ связана с вершинами $(\mathbf{a}_{N-1}, \mathbf{a}_{N-2}, \dots, \mathbf{a}_1, \tilde{\mathbf{a}}_0)$, то значения маски определяем так, чтобы

$$\sum_{\tilde{\mathbf{a}}_0} |m^{(0)}(F_{-N}^{(s)\perp} \mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{-N}} \mathbf{r}_{-N+1}^{\mathbf{a}_{-N+1}} \dots \mathbf{r}_{-1}^{\mathbf{a}_{-1}} \mathbf{r}_0^{\tilde{\mathbf{a}}_0})|^2 = 1 \text{ и}$$

$$m^{(0)}(F_{-N}^{(s)\perp} \mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{-N}} \mathbf{r}_{-N+1}^{\mathbf{a}_{-N+1}} \dots \mathbf{r}_{-1}^{\mathbf{a}_{-1}} \mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_0}) = 0 \text{ для всех } \mathbf{a}_0 \notin \{\tilde{\mathbf{a}}_0\}. \quad (3)$$

Также, определим $m^{(0)}(F_{-N}^{(s)\perp}) = 1$.

Теорема 3. [5] Пусть по N -валидному дереву T построены дерево \tilde{T} , граф Γ и определены значения маски $m^{(0)}(\chi)$ так, как указано в равенствах (3). Пусть Пусть \tilde{H} -высота дерева \tilde{T} . Тогда равенство

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^{\infty} m^{(0)}(\chi \mathcal{A}^{-k}) \in \mathfrak{D}_{-N}(F_M^{(s)\perp})$$

определяет ортогональную масштабирующую функцию $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$, порождающую КМА, причем M не превышает $\tilde{H} - N$.

Открытым остается вопрос: все ли масштабирующие функции их класса $\mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$ можно построить с помощью данного алгоритма? Существует предположение, что данный алгоритм позволяет строить действительно все функции из данного класса.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00152).

Литература

1. Lukomskii S., Vodolazov A. *Non-Haar MRA on local fields of positive characteristic* // J. Math. Anal. Appl. – 2016. V. 433, № 2. – P. 1415–1440.
2. Jiang H., Li D., Jin N. *Multiresolution analysis on local fields* // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – V. 294. – P. 523–532.
3. Behera B, Jahan Q. *Wavelet packets and wavelet frame packets on local fields of positive characteristic* // J. Math. Anal. Appl. – 2012. – V. 39. – P. 1–14.
4. Водолазов А.М., Лукомский С.Ф. *КМА на локальных полях положительной характеристики* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14, № 4(2). – С. 511–518.
5. Berdnikov G., Kruss Iu., Lukomskii S. *On orthogonal systems of shifts of scaling function on local fields of positive characteristic* // Turk. J. Math. – 2017. – V. 41, № 2. – P. 244–253.

REFINABLE STEP FUNCTION ON LOCAL FIELDS OF POSITIVE CHARACTERISTIC AND ALGORITHM FOR CONSTRUCTING SUCH FUNCTION

Iu.S. Kruss

The algorithm for constructing compactly supported refinable step function on local fields of positive characteristic is discussed.

Keywords: multiresolution analysis, refinable function, local fields of positive characteristic.