УДК 514.11 + 378.147

ЧЕТЫРЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Костин С.В., старший преподаватель,
МИРЭА — Российский технологический университет, г. Москва
kostinsv77@mail.ru

Аннотация. Отмечается внутреннее единство математики, проявляющееся, в частности, в том, что часто одну и ту же математическую задачу можно решить разными, иногда существенно различающимися, способами. Этот тезис проиллюстрирован на примере одной интересной геометрической задачи.

Ключевые слова: преподавание математики, геометрия, методы решения геометрических задач.

FOUR SOLUTIONS OF ONE GEOMETRIC PROBLEM

Kostin S.V., senior lecturer,
MIREA — Russian Technological University, Moscow
kostinsv77@mail.ru

Abstract. It is noted the unity of mathematics that can be seen, for example, in the fact that several ways of solution of one and the same problem can be often proposed. This thesis is illustrated by one interesting geometric problem.

Keywords: teaching of mathematics, geometry, methods of solution of geometric problems.

Как методисты в области преподавания математики, так и действующие учителя математики и преподаватели вузов хорошо знают тот факт, что зачастую значительно полезнее рассмотреть несколько различных решений одной задачи, чем решить несколько однотипных задач.

С чем это связано?

Думается, что это связано с тем, что, решая одну и ту же задачу разными способами, мы устанавливаем взаимоотношения между различными математическими объектами и убеждается в том, что математические знания не разрознены, а глубоко переплетены и связаны друг с другом. Говоря на языке теории графов, можно сказать, что математические знания образуют «сильно связный» граф, в котором от одной вершины к другой можно пройти несколькими, зачастую совершенно различными, путями.

В нашей статье [1] мы уже отмечали этот факт и проиллюстрировали его, приведя пять существенно различных доказательств одного важного свойства чисел Фибоначчи. В статье [3] мы рассмотрели три принципиально различных решения интересной задачи о делимости целых чисел (первое из этих решений основано на использовании фактов из области теории многочленов от нескольких переменных, второе решение основано на использовании фактов из области теории многочленов от одной переменной, третье решение основано на методе математической индукции).

Отметим, что решение, понятное и убедительное для одного человека может совершенно не быть таковым для другого. Поэтому в учебниках и сборниках задач, по нашему мнению, целесообразно приводить несколько решений одной и той же задачи, для того чтобы каждый человек мог выбрать решение, как говорится, «на свой вкус». Подробнее об этом мы писали в нашей статье [2].

В данной статье мы хотели бы еще раз акцентировать внимание на глубокой взаимосвязи и взаимопереплетении математических знаний, проявляющемся, в частности, в том, что часто одну и ту же математическую задачу можно решить разными, иногда существенно различающимися, способами.

Рассмотрим одну несложную, но, на наш взгляд, очень показательную задачу из учебника геометрии 7-го класса. Это задача 9.44 из углубленного учебника геометрии [4].

Украинские математики и педагоги А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский и М.С. Якир написали замечательные, на наш взгляд, прямо-таки выдающиеся учебники математики для 5–6 классов, алгебры для 7–9 классов, алгебры и начал анализа для 10–11 классов и геометрии для 7–11 классов.

Это поистине титанический труд, особенно если учесть высочайшее качество этих учебников, а также тот факт, что все учебники (кроме учебников математики для 5–6 классов) написаны авторами в двух вариантах: обычном и углубленном.

Углубленные учебники, чтобы их не путали с «неуглубленными» учебниками, издаются под легко угадываемым псевдонимом «А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков» (где Поляков = Полонский + Якир).

Отличительной особенностью всех учебников данного авторского коллектива является крайне продуманная, тщательно методически выстроенная система задач. Задачи, приводимые в каждом параграфе, делятся на четыре секции (они помечены определенными символами): простые задачи, задачи среднего уровня сложности, сложные задачи и задачи высокой сложности.

Задача 9.44 из учебника [4], которую мы рассмотрим в данной статье, помещена в параграфе 9 («Равнобедренный треугольник и его свойства») и открывает в этом параграфе секцию задач высокой сложности.

Вот условие этой задачи.

Задача 9.44. В треугольнике ABC ($\angle B = 90^\circ$) биссектриса AE равна отрезку EC. Докажите, что $AC = 2AB$. □

Решение 1. Пусть $\angle BAE = \angle EAC = \alpha$ (см. рис. 1). Поскольку треугольник AEC является равнобедренным ($AE = EC$), то углы при основании этого треугольника равны, то есть $\angle ACE = \angle CAE = \alpha$.

Запишем для треугольника ABC теорему о сумме углов треугольника: $90^\circ + \alpha + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$.

Итак, в прямоугольном треугольнике ABC острый угол ACB равен 30°. Следовательно, согласно известной теореме, катет, лежащий против этого угла, равен половине гипотенузы, то есть $AB = \frac{1}{2} AC \Rightarrow AC = 2AB$.

Утверждение задачи доказано. □

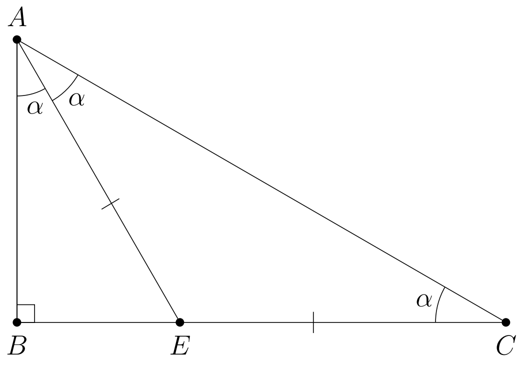

Рис. 1

Такое решение задачи 9.44 нашел мой ученик Николай, который заканчивал 9-й класс и с которым мы (для подготовки к ОГЭ) решали задачи из секции сложных задач и из секции задач высокой сложности углубленных учебников геометрии для 7–9 классов.

Выслушав это решение Николая, я сказал: «Николай, Вы совершенно правы», а потом на некоторое время я задумался…

Спустя 2–3 минуты я сказал: «Николай, в Вашем решении Вы использовали теорему о прямоугольном треугольнике с острым углом 30°. Эта теорема изучается в 8-м классе. Но задача 9.44 помещена в учебнике геометрии 7-го класса. С одной стороны, Ваше решение совершенно верное и на ОГЭ за такое решение Вы получили бы полный балл. Но в то же время, чисто из интереса, можете ли Вы решить задачу 9.44, не используя каких-либо фактов из курса геометрии 8-го класса?

На этот раз задумался Николай.

Уже через 5–7 минут Николай предложил новое (второе) решение задачи 9.44.

Решение 2. Опустим высоту EH в треугольнике AEC (см. рис. 2). Поскольку треугольник AEC равнобедренный с вершиной E ($AE = EC$), то высота EH является также медианой, то есть $AH = HC$.

Прямоугольные треугольники ABE и AHE равны по гипотенузе (она у них общая — AE) и острому углу ($\angle BAE = \angle HAE$). Поэтому $AB = AH$. Следовательно, $AC = AH + HC = 2AH = 2AB$.

Утверждение задачи доказано. □

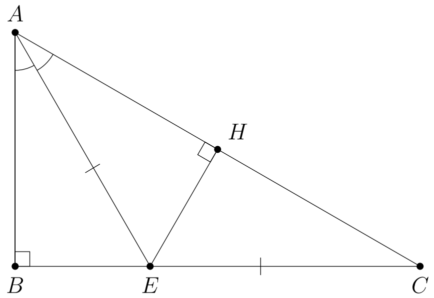

Рис. 2

«Прекрасно!, — сказал я, — переходим к следующей задаче 9.46» (задача 9.45 выделена в учебнике [4] особым цветом, что означает, что она рекомендуется для домашней работы; поэтому эту задачу мы с Николаем на занятии пропустили).

Пока Николай решал задачу 9.46 (а надо сказать, что я стараюсь никогда не вмешиваться в процесс решения задачи учеником, считая, что нет ничего полезнее длительных самостоятельных размышлений ученика над задачей, которые в конце концов приводят к положительному результату, то есть к решению задачи), я подумал вот о чем.

В решении 2 используется признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу. Этот признак в учебнике [4] изучается позже того места, где помещена задача 9.44, а именно, он изучается ближе к концу учебника — в § 19 («Свойства прямоугольного треугольника»).

Но если авторы учебника [4] поместили задачу 9.44 в § 9, то, следовательно, эта задача имеет решение, не использующее признаки равенства прямоугольных треугольников. Что же это за решение?

Я не стал беспокоить Николая и сам (пока Николай решал задачу 9.46) нашел еще одно (третье) решение задачи 9.44.

Решение 3. Отложим на луче AC отрезок AK такой, что $AK = AB$ (см. рис. 3). Треугольники BAE и KAE равны по первому признаку (у них сторона AE общая, $AK = AB$ по построению и $\angle BAE = \angle KAE$). Поэтому $\angle AKE = \angle ABE = 90^\circ$.

Следовательно, EK — высота треугольника AEC.

Поскольку треугольник AEC равнобедренный с вершиной E ($AE = EC$), то высота EK является также медианой, то есть $AK = KC$.

Итак, $AC = AK + KC = 2AK = 2AB$.

Утверждение задачи доказано. □

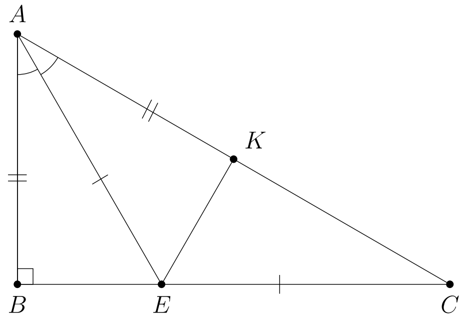

Рис. 3

Задача 9.44 не на шутку заинтересовала меня. Поэтому, приехав домой, я решил продолжить исследование данной геометрической конфигурации и через некоторое время нашел еще одно (четвертое) решение задачи.

Решение 4. Отложим на луче AB отрезок AK такой, что $AK = AC$ (см. рис. 4). Треугольники KAE и CAE равны по первому признаку (у них сторона AE общая, $AK = AC$ по построению и $\angle KAE = \angle CAE$). Поэтому $KE = CE = AE$.

Следовательно, треугольник KAE является равнобедренным, а значит, высота EB этого треугольника является также медианой, то есть $AB = BK$.

Итак, $AC = AK = AB + BK = 2AB$.

Утверждение задачи доказано. □

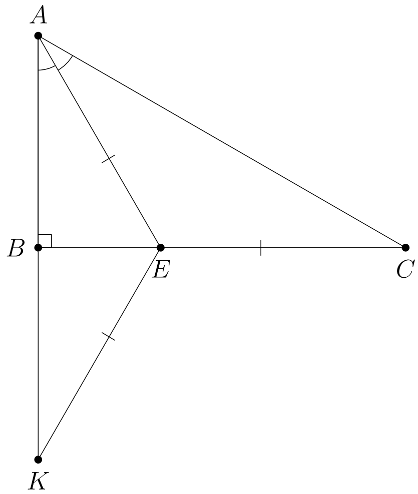

Рис. 4

Что здесь можно сказать?

Только то, что геометрия — это великолепный тренажер для развития ума, интеллекта, логики, образного мышления.

Замечательный ученый и педагог, автор большого количества книг и пособий по математике (в частности, по геометрии) Игорь Федорович Шарыгин неоднократно отмечал (см., например, [5]), что геометрия — это «экологически чистый» продукт, который, при правильном его употреблении, способен не только способствовать интеллектуальному развитию людей, но и (подобно, скажем, классической музыке или классической литературе) способен оказывать на людей терапевтическое (в самом прямом, медицинском значении этого слова) воздействие.

Рассмотренная нами задача еще раз показывает, как много существует взаимосвязей между математическими (в частности, между геометрическими) утверждениями и фактами.

Думается, что при преподавании математики не надо жалеть времени на то, чтобы, найдя одно решение задачи, подумать вместе с учениками о том, можно ли решить эту задачу проще, изящнее или просто с помощью другого метода. В таких беседах и обсуждениях обнаруживаются единство и взаимосвязь различных положений и теорем математики, возникает ощущение стройности и логичности ее здания. Это способствует не только более глубокому пониманию математики, но и пробуждению к ней искреннего интереса, когда процесс обучения из сухого, скучного и формального становится живым, ярким и увлекательным.

Автор надеется, что данная статья заинтересовала читателей и будет очень благодарен за любые комментарии или замечания по затронутым нами вопросам.

Литература

1. Костин С.В. О методах доказательства свойств чисел Фибоначчи // Математика в высшем образовании. – 2016. – № 14. – С. 25–42.
2. Костин С.В. Об убедительных и неубедительных решениях математических задач // Наука и школа. – 2015. – № 5. – С. 151–155.
3. Костин С.В. Метод математической индукции. Статья 1. Возможности и ограничения метода математической индукции // Математическое образование. – 2016. – № 2 (78). – С. 26–32.
4. Мерзляк А.Г., Поляков В.М. Геометрия. 7 класс. – М.: Вентана-Граф, 2017. – 208 с.
5. Шарыгин И.Ф. Рассуждения о концепции школьной геометрии. – М.: МЦНМО, 2000. – 56 с.