УДК 51 (077)

МЕТОДИКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СРЕДНЕВЕКОВЫХ ИСТОРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Комили А.Ш., д.ф.-м.н., профессор,
Бохтарский государственный университет им. Носира Хусрава (Таджикистан), г. Бохтар
akomili2006@mail.ru
Шодиён М.С., д. пед. н., профессор,
Бохтарский государственный университет им. Носира Хусрава (Таджикистан), г. Бохтар
mahmadshodi@mail.ru

Аннотация. Статья посвящена методике использования средневековых исторических задач на уроках математики на примере общеобразовательных школах и вузах Республики Таджикистан. Установка на решение прикладных задач определяет новый подход к формам и методам изложения практической математики, занявшей почетное место в системе образования. Знание истории математики и методики ее преподавания очень важно для студентов, учеников и для тех, кто хочет понять суть и значение современных математических достижений. Средневековые математические сочинения не только положительно влияют на дальнейшее развитие математики, а также сыграют существенную роль для общего мировоззрения учеников и студентов.

Ключевые слова: математика, педагогика, история, средневековья, задача, методика, Таджикистан.

THE METHOD OF USING MEDIEVAL HISTORICAL TASKS AT LESSONS OF MATHEMATICS

Komili A.Sh., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Bokhtar State University. Nosir Khusrava (Tajikistan), Bokhtar
akomili2006@mail.ru
Shodiyon M.S., Doctor of Pedagogical Sciences, Professor,
Bokhtar State University. Nosir Khusrava (Tajikistan), Bokhtar
akomili2006@mail.ru

Abstract. The article is devoted to the method of using medieval historical problems in the lessons of mathematics on the example of general schools and colleges of higher education of the Republic of Tajikistan. Installation for solving applied problems defines a new approach to the forms and methods of presentation of practical mathematics, which took an honorable place in the education system. Knowing the history of mathematics and the methods of teaching it is very important for students, students and for those who want to understand the essence and significance of modern mathematical achievements. Medieval mathematical works not only positively influence the further development of mathematics, but also play a significant role for the general outlook of students and students.

Keywords: mathematics, pedagogy, history, Middle Ages, problem, methodology, Tajikistan.

Знание истории математики и методики ее преподавания очень важно для студентов, учеников и для тех, кто хочет понять суть и значение современных математических достижений. Центральное место в статье занимает поиск и систематизация исторического материала по проблеме становления и развития математики и математического образования в Республике Таджикистан.

Приведем несколько примеров использования материала о становлении и развитии математики и математического образования при изучении математики.

При изучении темы «Бинома Ньютона» следует упомянуть об уравнениях Омара Хайяма, а при изучении «теорема Ферма» - об идеи и уравнение Абу Махмуда Худжанди. Таким образом, студентам рекомендуем дать сведения о вкладе Абу Махмуда Худжанди (или Омара Хайяма) на дальнейшее развитие математики в средние века. По словам известного историка математики Юшкевича А.П., средневековая восточная математика – это, прежде всего, вычислительная математика, совокупность расчетных алгоритмов для решения арифметических, алгебраических, геометрических задач, вначале более простых, затем значительно усложнившихся и стимулирующих теоретическую обработку и создание новых математических понятий: вначале - алгоритмов разрозненных, затем объединяемых в научные дисциплины [4].

Установка на решение прикладных задач определяет новый подход к формам и методам изложения практической математики, занявшей почетное место в системе образования. Самые выдающиеся ученые того времени писали сочинения по прикладной математике, служившие наставлениями и руководствами для готовящихся к научной, судебной и распорядительной хозяйственной деятельности.

Долг учителя, - утверждал Ибн Сина, - прежде всего, направить своего ученика к раскрытию запутанных умозаключений и приведению их к ясности [1, с. 101]. Именно в таком духе был написан трактат «Об индийском счете» великого Мухаммада Ибн Мусы Хорезми. «Мы решили разъяснить об индийском счете с помощью девяти букв, — писал Хорезми, — которыми они выражали любое свое число для легкости и краткости, облегчая дело тому, кто изучает арифметику, т. е. число самое большое и самое малое, и все, что есть в нем от умножения и деления, сложения и вычитания и прочее.

Следует отметить, что среди средневековых сочинений по практической арифметике на первом месте как по времени написания, так и по влиянию на дальнейшее развитие науки должен быть назван именно этот арифметический трактат Хорезми. Он был переведен в XII в. на латинский язык и положил начало позиционной системе исчисления. Это сочинение явилось, таким образом, первым учебником арифметики на новой основе не только на средневековом мусульманском Востоке, но и в европейских странах также. В арабском оригинале этот трактат не сохранился и известен сейчас в средневековом переводе на латинский язык.

Ал-Хорезми заведовал библиотекой «Дома мудрости», изучал индийские и греческие знания. Он был как величайшим математиком своего времени, так и замечательным астрономом. Он составил астрономические и тригонометрические таблицы. Следует упомянуть, что слово «алгебра» происходит от названия его сочинения «ربجلا و هلباقملا» («Ал-джабр ва-л-мукабала» - «Восполнение и противопоставление»), в котором излагаются методы решения уравнений первой и второй степеней с одним неизвестным. Вслед за ал-Хорезми преимущественно математикой и частично астрономией занимались следующие учёные, работавшие в основном в «Доме мудрости»: Ахмад ибн Абдаллах ал-Мервази (ок. 770 – 866 гг.), Абу-л-Аббас Ахмад ибн Мухамад ал-Фергани (IX в.), Абу-л-Вафа Мухаммад ибн Мухаммад ал-Бузджани (940 – 988 гг.), Абу Махмуд Хамид ибн ал-Хидр ал-Худжанди (ум.ок. 1000 г.), Абу Наср Мансур ибн Али ибн Ирак (ок. 960 – 1020 гг.) (он был учителем Абурайхана Беруни). Эти учёные занимались в основном математикой, тригонометрией, астрономией, а также и географией.

Перу ал-Хорезми принадлежит трактат «*Об индийском счёте*», который сохранился в латинском переводе (Denumeroindorum) и способствовал популяризации позиционной системы во всём халифате, вплоть до Испании (Андалусии). Когда в XII веке эта книга была переведена на латинский, от имени её автора (Algorithmi) произошло наше слово «*алгоритм*» (algorithm). Самое большое влияние оказало на европейскую науку и породило ещё один современный термин «*алгебра*» другое его сочинение под названием «Аль-китаб аль-мухтасар фи хисаб аль-джабр ва-ль-мукабала» («Краткая книга об исчислении аль-джабра и аль-мукабала»). В книге словесно разбираются линейные и квадратные уравнения без учета отрицательного корня.

– квадраты равны корням ($5x^2=10x$)
– квадраты равны числу ($5x^2=80$)
– корни равны числу ($4x=20$)

– квадраты и корни равны *числу* ($x^2+10x=39$)
– *квадраты и числа* равны корням ($x^2+21=10x$)
– корни и числа равны квадрату ($3x+4=x^2$).

Многие средневековые мусульманские математики комментировали книгу «Ал-джабр ва-л-мукабала» ал-Хорезми. После ал-Хорезми на его примере сочинили свою книгу ”Китаб ал-джабр ва-л-мукабала” более 40 и на ”раздел наследства” более 70 ученых. Краткая информация об этих ученых и их сочинениях приведена в книге.

В ”Ключе арифметики” ал-Каши решены 7 задач на раздел наследств: первые четыре из них решаются методом таблицы. Метод таблицы принадлежит ал-Каши. Шестой и седьмой примеры сводятся к квадратным уравнениям с параметром. Ал-Каши эти задачи решает по правилу ал-Хорезми. По-видимому, задачи, сводящие к квадратным уравнениям с параметрами, впервые встречаются у ал-Каши. Следует отметить, что вопросы раздела наследства, указанные в 11, 12 и 176 аятах, 4 суре ”Женщины” (Ниса) Корана, являются одной из основных причин возникновения и развития средневековой алгебры.

Рассмотрим несколько задач из трактата Бахоуддина Амули (1547-1621) «Хулосат-ул-хисаб», который хранится в рукописном фонде Национальной библиотеки Республики Таджикистан (№ 1788, с. 142). Следует отметить, что названная рукопись имеет большое значение как в развитии математической науки, так и в развитии математического образования в средние века, и, к сожалению, до сих пор полностью не исследована и не переведена на русский язык. Существуют частично его исследования со стороны таких известных немецких, русских и таджикских ориенталистов и историков математики, как Г.Г.Ф. Нессельман, Г.П. Матвиевская, Б.А.Розенфельд, Г. Собиров и И.Р.Мухаммадиев [2; 3; 5].

Задача 1. «Число 10 разделено на две части. Если в каждую часть слагать их корни и умножать между собой, то получается один из неизвестных».

Эта задача требует решения таких систем:

$$x + y = 10$$
$$(x + \sqrt{x})(y + \sqrt{y}) = x$$

или

$$x + y = 10$$
$$(x + \sqrt{x})(y + \sqrt{y}) = y$$

Легко можно убедиться в том, что эти системы не имеют правильных решений в множестве рациональных чисел. Немецкий востоковед, филолог и историк математики Георг Генрих Фердинанд Нессельман (1811-1881) в 1843 г. перевел на немецкий язык трактат «Хулосат-ул-хисаб» [5], фотокопию которого мы имеем, и дал ему научный комментарий. Но при этом неправильно переведено последнее условие этой задачи. Вместо «то получается один из неизвестных» им переведено «получается данное число».

В этом случае Нессельман составляет такую систему:

$$x + y = 10$$
$$(x + \sqrt{x})(y + \sqrt{y}) = n$$

Он показывает, что если вместо n было бы определенное число, т.е. 24, то получается

$$x + y = 10$$
$$(x + \sqrt{x})(y + \sqrt{y}) = 24$$

Тогда решение этой системы будет: x=1; y=9.

Задача 2. «Если к квадрату прибавить число 10, то получается полный квадрат, а если от него отнять 10, тоже получается полный квадрат».

Эта задача требует решения такой системы:

$$x^2 + 10 = y^2$$

$$x^2 - 10 = z^2$$

Примерно такую систему исследовал первый крупный математик средневековой Европы XIII в. итальянец Леонардо Пизанский (1170-1250), наиболее известный как Фибоначчи:

$$x^2 + a = y^2$$
$$x^2 - a = z^2$$

Он доказал, что если $a = 4mn(m+n)(m-n)$

(a, m, n– целые числа), то $x^2 = m^2 + n^2$

В этом случае, если a делится на 24, то данная система имеет целое решение, а если не делится, то система имеет дробное решение. Для этого он приводит такой пример:

$$x^2 + 5 = y^2$$
$$x^2 - 5 = z^2$$

Он показал следующее решение этой системы:

$$x = 3\frac{5}{12}; y = 4\frac{1}{12};\ z = 2\frac{7}{12};$$

Для системы задач Бахоуддина такое число $\sqrt{26}$.

Задача 3. «Зейду дали 10 дирхем без корня долей Амру, а Амру дали 5 дирхем с корня доли Зейда. Требуется узнать, сколько доли у Зейда, а сколько у Амра?»

(Решение: «Если x^2 доля Зейда, и y^2 доля Амра»)

Для решения этой задачи требуется решить следующую систему:

$$x^2 + y = 10$$
$$y^2 + x = 10$$

Если во втором уравнении подставить значение y из первого уравнения, то получаем:

$$x^4 - 20x^2 + x + 90 = 0$$

Это уравнение не имеет рационального решения, и поэтому система не имеет решения.

Задача 4. «Кубическое число разделено на две части, которые в свою очередь являются кубом».

Эта задача требует решения такого уравнения:

$$x^3 + y^3 = z^3$$

Для случая $n = 3$ эту теорему в X веке доказал таджикский математик и астроном Абу Махмуд ибн Хизр ал-Худжанди (940-999), но его доказательство не сохранилось. В общем виде сформулировал данную теорему и доказал для случая $n = 4$ французский юрист и математик XVII в. Пьер Ферма (1601-1665) в 1637 году на полях «Арифметики» Диофанта, которое тоже не сохранилось. Далее для определённых чисел решили эту теорему следующие математики: Леонард Эйлер (1707-1783) в 1763 году для $n = 3$, Дирихле и Лежандр в 1825 – для $n = 5$, Ламе – для $n = 7$, Кумер – для всех простых n меньших 100, за возможным исключением так называемых иррегулярных простых 37, 59, 67.

Следует отметить, что над полным доказательством великой теоремы Худжанди-Ферма работало немало выдающихся математиков и множество дилетантов-любителей. Относительно этой «загадочной» теоремы необходимо отметить, что теорема стоит на первом месте по количеству некорректных «доказательств». Однако, стоит констатировать, что эти усилия привели к получению многих важных результатов современной теории чисел.

Задача 5. «Число 10 надо делить, чтобы после деления каждую часть между собой, и сложения их результатов получилась одна из этих сторон».

Для решения этой задачи надо решить такую систему уравнений:

$$x + y = 10$$
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = x$$

или

$$x + y = 10$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=y$$

Эти системы равносильны таким кубическим уравнениям:

$$x^3-12x^2+20x-100=0$$
$$x^3-22x^2+120x-100=0$$

Эти уравнения не имеют рационального решения, и поэтому вся система не имеет решения.

Задача 6. «Найти три непрерывно связанных квадрата, сумма которых представляет квадрат».

Предположим, что эти неизвестные квадраты x^2, y^2, z^2, то от условия задачи получаем такое уравнение:

$$x^2+x^2\cdot y^2+x^2\cdot y^4=U^2$$

или

$$1+y^2+y^4=U^2$$

Это уравнение не имеет решения, и поэтому вся система не имеет решения.

Задача 7. «Надо сложить квадрат числа с его корнем и число 2, чтобы получился квадрат. Из этого квадрата отнять его корень и число 2 так, чтобы в результате получился квадрат».

Эта задача требует решения такой системы:

$$x^2+x+2=y^2$$
$$x^2-x-2=z^2$$

Если сложить эти два уравнения, то получаем:

$$2x^2=y^2+z^2$$

Это уравнение не имеет рационального решения. Однако, Нессельман неправильно переводя эту задачу, составляет такую систему:

$$x^2+x+2=y^2$$
$$x^2+x-2=z^2$$

Для этой системы он показывает следующее решение:

$$x=\frac{34}{15};\, y=\frac{46}{15};\, z=\frac{18}{15}$$

Следует отметить, что «Хулосат-ул-хисоб» Бахауддина Амули имел большое научное и учебно-методическое значение в средние века со времен жизни автора и в последующие столетия. Ввиду популярности трактата «Хулосат-ул-хисоб» к нему в разное время было написано множество комментариев.

Рассмотрим несколько задач из трактата «Пользы ат-Туси в алгебре и ал-мукабале» Насириддина ат-Туси (1201-1274).

Задача 1. «Ищем такое число, что будучи умножено на его удвоенное значение, оно равно удвоенной сумме этого числа с его» удвоенным значением».

Решение. «Примем это число за вещь. Умножим эту вещь на его удвоенное значение, получится два квадрата вещи. Это равно – шести вещам. Квадрат вещи равен трем вещам. Это первая из простых задач. Поэтому величина неизвестной вещи - «три». В современной математической символике имеет вид:

$$2x\cdot x=2(2x+x)$$
$$2x^2=6x$$
$$x^2=3x$$

Задача 2. «Мы хотим разделить десять на две части так, что произведения одной части на четыре, а другой на шесть будут равны».

Решение: «Примем одну из них за вещь, а другую – за десять без вещи. Умножим вещь на четыре, получится четыре вещи. Затем умножим без десяти, без вещи на шесть, получится шестьдесят без шести вещей. Это равно четырем вещам. После восполнения будет: десять вещей равны числу шестьдесят. Задача приведена к третьей из простых. Разделим число на число вещей. Это первая часть. Остается другая часть – четыре». В современной символике имеет вид:

$$4x=6(10-x)$$

$$10x = 60$$
$$x = 6$$

Теперь, подставляя

$$x = 6$$

в

$$(10 - x),$$

можно найти второе значение неизвестного.

Литература

1. Ибни Сино. Тадбири манзил (на персидский язык). – Тегеран, 1939.
2. Мухаммадиев И.Р. Бахоуддин Амули и его математическая литература в Средней Азии XVI-XIX вв. (по рукописным источникам). Дисс. на соиск. уч. степени канд. ист. наук. – Душанбе, 1989.
3. Собиров Г.С. «Хулосат-ул-хисаб» Бахэддина // Вопросы истории и методики элементарной математики. – 1962. – №1. – С. 5-16.
4. Юшкевич А.П. История математики в средние века. – М.: Физматгиз, 1961. – 448 с.
5. Nesselmann Behe-Eddins der Bechnkunst Arabusch und Daetsch heransg. Berlin, 1843.