bundle of a foliated manifold.

Keywords: Manifold over algebra, Lie derivative, second order transverse bundle.

УДК 514.764

УПЛОЩЕННЫЕ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ СО СВЯЗНОСТЬЮ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ЛИФТА, ПОРОЖДЕННЫЕ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫМИ КОНЦИРКУЛЯРНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ БАЗЫ

К.М. Зубрилин[1]

1 *kzubrilin@yandex.ru*; Керченский государственный морской технологический университет

В работе изучаются уплощающие свойства полного лифта инфинитезимального концирκулярного преобразования. Касательное расслоение рассматривается как аффинно-связное пространство со связностью горизонтального лифта. Вводится понятие E-лифта для тензорного поля произвольного типа, употребление которого необходимо в ковариантном дифференцировании относительно связности горизонтального лифта.

Ключевые слова: Уплощение, порядок уплощения, p-геодезическая кривая, уплощенная кривая, p-геодезическое отображение, уплощенное отображение, p-геодезическое инфинитезимальное преобразование.

Уплощенные кривые. Вектор r-ой кривизны ξ_r определяется индуктивно: $\xi_r = \nabla_t \xi_{r-1}$, $\xi_1 = \nabla_t \xi$, ξ – поле касательных векторов.

Определение 1. ([1], [2]) *Произвольно возьмем точку p на кривой $\mathcal{C}$. Если в точке p векторы $\xi, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}$ линейно независимы, а векторы $\xi, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}, \xi_m$ линейно зависимы, то говорят, что кривая $\mathcal{C}$ в точке p имеет уплощение m-го порядка; число m называется порядком уплощения точки p кривой $\mathcal{C}$.*

По свойствам внешнего произведения, *условия*

$$\xi \wedge \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_{m-1} \wedge \xi_m = 0, \quad \xi \wedge \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_{m-1} \neq 0, \tag{1}$$

являются необходимыми и достаточными для того, чтобы кривая $\mathcal{C}$ имела в точке p уплощение m-го порядка.

Определение 2. ([1], [2]) *Кривая $\mathcal{C}$ в аффинно-связном пространстве (M, ∇) называется m-геодезической, если в каждой своей точке она имеет уплощение m-го порядка.*

Для того, чтобы кривая $\mathcal{C}$ была m-геодезической необходимо и достаточно, чтобы вдоль нее выполнялись условия (1).

С другой стороны, если кривая $\mathcal{C}$ – m-геодезическая, то вдоль нее выполняется равенство

$$\xi_m = a_0 \xi + a_1 \xi_1 + \dots + a_{m-1} \xi_{m-1}, \tag{2}$$

где $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ – некоторые функции, определенные вдоль кривой $\mathcal{C}$. Уравнение (2) представляет собой дифференциальное уравнение m-геодезической кривой.

Уплощенные инфинитезимальные преобразования. Рассмотрим векторное поле X на аффинно-связном пространстве (M,∇) которое порождает поток $\phi_t\colon D_t \to M$, $D_t \subset M$, $|t| < \varepsilon$ (см. [3] или 1-параметрическую группу см. [4]).

Пусть $\mathcal{C}$ – гладкая кривая в M и ξ_m – поле векторов m-ой кривизны вдоль кривой $\mathcal{C}$. Под действием преобразования $\phi_t\colon D_t \to M$ кривая $\mathcal{C}$ переходит в кривую-образ $\mathcal{C}^{(t)} = \phi_t(\mathcal{C})$. Рассмотрим поле $\xi_m^{(t)}$ векторов m-ой кривизны вдоль кривой-образа $\mathcal{C}^{(t)}$. Тогда $\phi_t^* \xi_m^{(t)}$ – перенос векторного поля $\xi_m^{(t)}$ на кривую $\mathcal{C}$.

Определение 3. *Производной Ли от вектора кривизны m-го порядка кривой $\mathcal{C}$ в точке p, относительно векторного поля X, называется предел*

$$(\mathcal{L}_X \xi_m)_p = \lim_{t\to 0} \frac{\left(\phi_t^* \xi_m^{(t)}\right)_p - (\xi_m)_p}{t}.$$

Пусть $\phi_t^* \nabla$ – перенос аффинной связности ∇ посредством преобразования $\phi_t\colon D_t \to M$. Если $\tilde{\xi}_m^{(t)}$ поле векторов m-ой кривизны вдоль кривой $\mathcal{C}$ относительно переноса $\phi_t^*\nabla$, то согласно известной теореме $\tilde{\xi}_m^{(t)} = \phi_t^* \xi_m^{(t)}$. Тогда для параметризации $\gamma\colon P \to M$ кривой $\mathcal{C}$ имеем

$$\mathcal{L}_X \xi_{m\,\gamma(s)} = \left.\frac{\partial \tilde{\xi}_{m\,\gamma(s)}^{(t)}}{\partial t}\right|_{t=0}.$$

Отсюда уже приходим к равенству

$$\mathcal{L}_X \xi_m = \nabla_s(\mathcal{L}_X \xi_{m-1}) + \mathcal{L}_X \nabla(\xi, \xi_{m-1}).$$

Предложение. *Для произвольной геодезической кривой $\mathcal{C}$, отнесенной к каноническому параметру s, производная Ли от вектора m-й кривизны имеет вид*

$$\mathcal{L}_X \xi_m = L_{m,X}(\underbrace{\xi, \dots, \xi}_{m+1}), \tag{3}$$

где последовательность $\left(L_{m,X}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ тензорных полей $L_{m,X} \in \mathfrak{T}^1_{m+1}(M)$ определяется по индукции правилом

$$L_{1,X} = \mathcal{L}_X \nabla, \qquad L_{m,X} = \nabla L_{m-1,X}.$$

Замечание. Для произвольного s раз ковариантного тензора P вместо $P(\underbrace{\xi, \dots, \xi}_{s})$ будем писать $P\left(\xi^s\right)$.

Определение 4. Говорят, что *векторное поле X сообщает кривой $\mathcal{C}$ в точке $p \in \mathcal{C}$ уплощение r-го порядка, если векторы ξ_p, $(\mathcal{L}_X\xi_1)_p, \dots, (\mathcal{L}_X\xi_{m-1})_p$ линейно независимы, а векторы ξ_p, $(\mathcal{L}_X\xi_1)_p, \dots, (\mathcal{L}_X\xi_{m-1})_p$, $(\mathcal{L}_X\xi_m)_p$ линейно зависимы.*

Учитывая критерий линейной независимости векторов через внешнее произведение, получим необходимые и достаточные условия уплощения r-го порядка, сообщаемого векторным полем X кривой $\mathcal{C}$ в точке p

$$\xi \wedge \mathcal{L}_X\xi_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{L}_X\xi_{m-1} \wedge \mathcal{L}_X\xi_m = 0, \qquad \xi \wedge \mathcal{L}_X\xi_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{L}_X\xi_{m-1} \neq 0. \tag{4}$$

Наибольший из порядков уплощения точек кривой $\mathcal{C}$ сообщаемых векторным полем X будем называть *максимальным порядком уплощения кривой $\mathcal{C}$ сообщаемым векторным полем X*.

Определение 5. *Векторное поле X называется r-геодезическим инфинитезимальным преобразованием (r-г.и.п.) если оно любой геодезической кривой сообщает максимальный порядок уплощения $\leqslant r$, и при этом существует по крайней мере одна геодезическая кривая максимальный порядок уплощения которой равен r.*

r-г.и.п. называется *абсолютно каноническим*, если $\mathcal{L}_X \xi_m = 0$ вдоль любой геодезической кривой.

Учитывая равенство (3) в равенстве (4), получим необходимые и достаточные условия r-г.и.п.

$$\delta(\xi) \wedge L_{1,X}\left(\xi^2\right) \wedge \ldots \wedge L_{m-1,X}\left(\xi^m\right) \wedge L_{m,X}\left(\xi^{m+1}\right) = 0$$

для всех ξ и

$$\delta(\xi) \wedge L_{1,X}\left(\xi^2\right) \wedge \ldots \wedge L_{m-1,X}\left(\xi^m\right) \neq 0$$

для некоторого ξ. При этом условия абсолютной каноничности примут вид

$$L_{m,X}\left(\xi^{m+1}\right) = 0$$

для всех ξ.

Отсюда уже получаем необходимые и достаточные условия r-г.и.п.

$$\begin{cases} S\left(\delta \wedge L_{1,X} \wedge \ldots \wedge L_{m-1,X} \wedge L_{m,X}\right) = 0, \\ S\left(\delta \wedge L_{1,X} \wedge \ldots \wedge L_{m-1,X}\right) \neq 0, \end{cases}$$

представляющие собой уравнения в инвариантной форме, полученные С. Г. Лейко.

Теорема 1. *Для произвольного векторного поля X на аффинно-связном пространстве (M, ∇) имеют место равенства*

$$L_{m,X^{\mathrm{C}}} = L^{\mathrm{H}}_{m,X} - \sum_{j=3}^{m+1} \overset{\overset{\mathrm{E}}{j}}{L}_{m,X} + \gamma \overset{1\leftarrow 2}{L}_{m+1,X} + \sum_{j=3}^{m+1} \overset{\overset{1\leftarrow 2}{1\leftarrow j}}{L}{}^{\mathrm{E}}_{m,X}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Следствие. *Для произвольного векторного поля ξ, справедливы равенства*

$$L_{m,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^{m+1}\right) = L^{\mathrm{H}}_{m,X}\left(\xi^{m+1}\right) - \sum_{j=3}^{m+1} \overset{\overset{\mathrm{E}}{j}}{L}_{m,X}\left(\xi^{m+1}\right) +$$
$$+ \gamma L_{m+1,X}\left(\xi^{m+1}\right) + (m-1) L^{\mathrm{E}}_{m,X}\left(\xi^{m+1}\right),$$

для произвольного $m = 1, 2, \ldots$.

Теорема 2. *Пусть X – инфинитезимальное конциркулярное преобразование, описываемое уравнениями $\mathcal{L}_X g = a g$ и $\nabla^2 a = \varphi g$. Тогда полный лифт X^{C}, относительно связности горизонтального лифта ∇^{H}, обладает следующими уплощающими свойствами*

1. *X^{C} является 1-каноническим 2-г.и.п. тогда и только тогда, когда $\varphi = 0$.*
2. *X^{C} является 2-каноническим 3-г.и.п. тогда и только тогда, когда $\varphi = const \neq 0$.*
3. *В общем случае, X^{C} является 3-каноническим 4-г.и.п.*

Литература

1. Лейко С. Г. *P-геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях, индуцированные геодезическими преобразованиями базисного многообразия* // Изв. вузов. Математика – 1992. – № 2. – С. 62–71.

2. Лейко С. Г. *P-геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях, индуцированные конциркулярными преобразованиями базисного многообразия* // Изв. вузов. Математика – 1998. – № 6. – С. 35–45.

3. Постников М. М. *Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия: Учеб. пособие для вузов.* – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 480 с.

4. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии*, Т.1, М.:Наука, 1981. – 344 с.

5. Yano K. *Tangent and cotangent bundles. Differential geometry* New York: Marcel Dekker, 1973. – 434 p.

6. Ishihara S. *On infinitesimal concircular transformations* // Kodai Math. Sem. Rep. – 1960. – Vol. 12. – № 2. - P. 45–56.

THE FLATTENING INFINITESIMAL TRANSFORMATIONS OF THE TANGENT BUNDLE WITH THE HORIZONTAL LIFT CONNECTION GENERATED BY THE INFINITESIMAL CONCIRCULAR TRANSFORMATION OF BASIS

K.M. Zubrilin

In this work the flattening properties of the complete lift of infinitesimal concircular transformation are studied. The tangent bundle is considered as the affinely connected space with the horizontal lift connection. The concept of the E-lift for a tensor field of any type is introduced. It necessary is used in the covariant differentiation concerning of the horizontal lift connection.

Keywords: The flattening, the order of flattening, the p-geodesic curve, the flattening curve, the p-geodesic map, the flattening map, the p-geodesic infinitesimal transformation.

УДК 514.822

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДЕФЕКТОВ

М.О. Катанаев[1]

1 *katanaev@mi.ras.ru*; Математический институт им. В. А. Стеклова, Казанский федеральный университет

Мы описываем дефекты – дислокации и дисклинации – в рамках геометрии Римана–Картана. Тензоры кривизны и кручения интерпретируются как поверхностные плотности векторов Френка и Бюргерса соответственно. Мы предлагаем новое выражение для свободной энергии, описывающее статическое распределение дефектов. Для фиксации системы координат используются уравнения нелинейной теории упругости. Калибровка Лоренца даёт уравнения для главного кирального SO(3) -поля. Когда дефекты отсутствуют, геометрическая модель сводится к теории упругости для векторного поля смещения и к главной киральной модели $SO(3)$ для спиновой структуры. Пример клиновой дислокации показывает, что теория упругости воспроизводит только линейную аппроксимацию геометрической теории дефектов. Мы также показываем, что уравнения асимметричной теории упругости для среды Коссера (Cosserat) естественно вкладываются в геометрическую теорию дефектов как