УДК 514.7

ЖЕСТКИЕ ГЕОМЕТРИИ НА СИНГУЛЯРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СЛОЕВ СЛОЕНИЙ И ГРУППЫ ИХ АВТОМОРФИЗМОВ

Н.И. Жукова[1]

1 *nina.i.zhukova@yandex.ru*; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Введена категория жестких геометрий на сингулярных многообразиях, которые определяются на пространствах слоев слоений. Выделена специальная категория $\mathfrak{F}_0$, содержащая орбифолды. В отличие от орбифолдов объекты из $\mathfrak{F}_0$ могут иметь нехаусдорфову топологию и даже могут не удовлетворять аксиоме отделимости T_0. Показано, что жесткая геометрия $(\mathcal{N},\zeta)$, где $\mathcal{N} \in Ob(\mathfrak{F}_0)$, допускает десингуляризацию. Для каждой такой геометрии $(\mathcal{N},\zeta)$ доказано существование и единственность структуры конечномерной группы Ли в группе всех автоморфизмов $Aut(\mathcal{N},\zeta)$ жесткой геометрии ζ на $\mathcal{N}$. Рассмотрены приложения к орбифолдам.

Ключевые слова: Слоение, пространство слоев, многообразие слоев, жесткая геометрия, группа автоморфизмов, орбифолд.

В настоящее время такие сингулярные объекты как пространства слоев слоений интенсивно изучаются (см., например, [4], [2]). Сингулярные пространства слоев слоений и орбит групп Ли, рассматриваются как обобщенные многообразия и находят применение как в самой математике, так и в физике.

Сингулярные пространства исследуются с помощью построения моделей, то есть хороших объектов, которые содержат всю информацию об этих пространствах. Известны различные подходы к построению моделей для исследования сингулярных пространств слоев слоений: 1) с помощью классифицирующего пространства, введенного Хефлигером; 2) с помощью некоммутативной геометрии, основанной Коном; 3) с помощью топосов Гротендика. Во всех трех указанных методах для слоения строится гладкий этальный группоид (иногда – группоид голономии) G, для которого определяются: 1) классифицирующее пространство BG; 2) C*-алгебра комплекснозначных функций на G; 3) классифицирующий топос Sh(G). Таким образом, все эти подходы основаны на использовании теории гладких группоидов, которая активно развивается в настоящее время. Особое значение приобрели этальные группоиды.

Лосик предложил другой, категориальный подход к исследованию пространства слоев слоений, при этом определение гладкой структуры на пространстве слоев дается с помощью обобщенного атласа, что позволяет рассматривать гладкие пространства слоев слоений как обобщенные многообразия. При определении дифференциальной геометрии на пространстве слоев слоений мы развиваем метод Лосика [3], [2].

При построении модели для жесткой геометрии на сингулярном многообразии слоев слоений из исследуемого класса слоений нами применяются результаты автора о слоениях с трансверсальными жесткими геометриями [5].

Среди геометрических структур на многообразиях жесткие геометрии выделяются благодаря их универсальности, поскольку они включают в себя картановы, параболические, проективные, конформные, аффинно-связные, римановы и псевдоримановы геометрии, а также G-структуры конечного типа.

Следуя Лосику [3], на пространстве слоев M/F произвольного слоения (M,F) мы определяем гладкую структуру с помощью атласа, и называем ее индуцированной гладкой структурой. Полученные таким образом гладкие пространства слоев называются *многообразиями слоев*. Коразмерность слоения называется размерностью его многообразия слоев. Многообразия слоев образуют категорию $\mathfrak{F}$.

Мы предполагаем, что все исследуемые слоения допускают связность Эресмана. Понятие связности Эресмана для слоения введено в [1] как естественное обобщение связности в расслоении. По определению, связность Эресмана для слоения (M,F) коразмерности n есть такое n-мерное распределение $\mathfrak{M}$, трансверсальное слоению, для интегральных кривых которого определен перенос вдоль кривых в слоях. Отметим, что понятие связности Эресмана носит глобальный дифференциально-топологический характер.

Определение 1. *Для данного многообразия слоев $\mathcal{N}$ гладкое слоение (M,F), допускающее связность Эресмана, называется ассоциированным с $\mathcal{N}$, если пространство слоев M/F с индуцированной гладкой структурой является объектом категории $\mathfrak{F}$, который изоморфен $\mathcal{N}$ в $\mathfrak{F}$.*

Напомним, что жесткая геометрия на многообразии T (возможно несвязном) есть пара $\xi = (P(T,H),\beta)$, состоящая из главного H-расслоения $P \to T$, где на многообразии P задана невырожденная $\mathbb{R}^k$-значная 1-форма β, согласованная с действием группы H на P. Мы говорим, что $\mathcal{N} \in Ob(\mathfrak{F})$ имеет жесткую геометрию ζ, моделируемую на ξ, если существует ассоциированное слоение (M,F), допускающее ξ в качестве трансверсальной структуры. Подчеркнем, что для данного многообразия слоев $\mathcal{N}$ существует множество ассоциированных слоений различных размерностей. Поэтому мы показываем корректность определения жесткой геометрии на $\mathcal{N}$, то есть, независимость ζ от выбора ассоциированного слоения (M,F), моделируемого на ξ и доказываем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{N}$ — многообразие слоев и (M,F) — некоторое ассоциированное слоение. Предположим, что (M,F) допускает трансверсальную жесткую геометрию $\xi = (P(T,H),\omega)$ и обладает связностью Эресмана. Тогда определены жесткая геометрия $\zeta = (\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(\mathcal{N},H),\alpha)$ на $\mathcal{N}$ и алгебра Ли $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(\zeta)$, где $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ – многообразие слоев поднятого слоения $(\mathcal{R},\mathcal{F})$ для (M,F) с индуцированным локально свободным действием группы Ли H на $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ таким, что $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}/H \cong \mathcal{N}$, и α — индуцированная невырожденная $\mathbb{R}^k$-значная 1-форма на $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$, причем Ли алгебра $\mathfrak{g}_0$ совпадает со структурной алгеброй Ли слоения (M,F) с трансверсальной жесткой геометрией.*

Определение 2. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(\zeta)$, указанная в Теореме 1, называется структурной алгеброй Ли жесткой геометрии ζ на $\mathcal{N}$.*

Жесткие геометрии на многообразиях слоев, являющихся объектами категории $\mathfrak{F}$, естественным образом образуют категорию $\mathfrak{RF}$. Жесткие геометрии на многообразиях слоев, имеющие нулевую структурную алгебру Ли, образуют полную подкатегорию $\mathfrak{RF}_0$ категории $\mathfrak{RF}$.

Нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\zeta \in Ob(\mathfrak{RF}_0)$ — жесткая геометрия на n-мерном многообразии слоев $\mathcal{N}$. Тогда:*

(i) группа $Aut(\zeta)$ всех автоморфизмов геометрии ζ допускает структуру конечномерной группы Ли, причем структура группы Ли определена однозначно;

(iii) размерность группы Ли $Aut(\zeta)$ удовлетворяет неравенству

$$\dim Aut(\zeta) \leq n + s,$$

где s — размерность группы Ли H.

Как известно, любой гладкий орбифолд является пространством слоев некоторого риманова слоения (M, F), все слои которого компактны. Кроме того, известно, что слоение (M, F) допускает связность Эресмана. Таким образом, каждый гладкий орбифолд можно рассматривать как объект категории $\mathfrak{F}_0$. Так как все слои ассоциированного слоения замкнуты, нетрудно показать, что структурная алгебра Ли $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(\zeta)$ любой жесткой геометрии ζ на $\mathcal{N}$ равна нулю. Следовательно, применение Теоремы 2 к орбифолдам позволяет утверждать, что группа Ли всех автоморфизмов любой жесткой геометрии на орбифолде является конечномерной группой Ли.

В случае, когда $(\mathcal{N}, \zeta)$ — гладкое многообразие с соответствующей геометрией ζ (римановой, аффинной связности или G-структурой конечного типа), из Теоремы 2 вытекают классические теоремы Майерса и Стинрода, Номидзу, Хано и Моримото, Эресмана, в которых доказано, что группы автоморфизмов указанных геометрий на многообразиях допускают структуру конечномерной группы Ли.

Благодарности.

Выражаю благодарность Антону Галаеву, который обратил мое внимание на работы Марка Вольфовича Лосика, за полезные обсуждения.

Публикация подготовлена в результате проведения исследования (проект No 16-01-0010) в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2016–2017 гг. и в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации "5 - 100".

Литература

1. Blumenthal R.A., Hebda J.J. *Ehresmann connections for foliations* // Indiana Univ. Math. J. – 1984. – V. 33. – N. 4. – P. 597–611.

2. Losik M.V. *Orbit spaces and leaf spaces of foliations as generalized manifolds // ArXiv: Math./1501. 04993v2* (1 Aug 2017).

3. Losik M.V. *On some generalization of a manifold and its characteristic classes* // Funktional Anal. i Prilozhen. – 1990. – V. 24. – N. 1. – P. 26–32.

4. Moerdijk J. *Models for the leaf spaces of a foliation,* in: European Congress of Mathematics: Barcelona, July 10–14. – 2000. – V. 1. – P. 481–492.

5. Zhukova N.I. *Complete foliations with transverse rigid geometries and their basic automorphisms* // Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia, Ser. Math. Information Sci. Phys. – 2009. – N. 2. – P. 14–35.

RIGID GEOMETRIES ON SINGULAR SPACES OF FOLIATION LEAVES AND THEIR AUTOMORPHISM GROUPS

N.I. Zhukova

We introduce a category of rigid geometries on singular spaces which are leaf spaces of foliations and are considered as leaf manifolds. We single out a special category $\mathfrak{F}_0$ of leaf manifolds containing the orbifold category as a full subcategory. Objects of $\mathfrak{F}_0$ may have non-Hausdorff topology unlike orbifolds. The topology of some objects of $\mathfrak{F}_0$ does not satisfy the separation axiom T_0. It is shown that a rigid geometry $(\mathcal{N},\zeta)$, where $\mathcal{N} \in Ob(\mathfrak{F}_0)$, admits a desingularization. Moreover, for every such geometry $(\mathcal{N},\zeta)$ we prove the existence and the uniqueness of a finite dimensional Lie group structure on the group of all automorphisms $Aut(\mathcal{N},\zeta)$ of the rigid geometry ζ on $\mathcal{N}$. The application to orbifolds is considered.

Keywords: Foliation, leaf space, leaf manifold, rigid geometry, automorphism group, orbifold.

УДК 514.76

ТРАНСВЕРСАЛЬНЫЕ РАССЛОЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В КАТЕГОРИИ МНОГООБРАЗИЙ НАД АЛГЕБРАМИ

С.К. Зубкова[1]

1 *zubkova.s.k@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Рассматриваются соответствия между голоморфными геометрическими объектами на трансверсальном расслоении второго порядка слоеного многообразия.

Ключевые слова: Многообразие над алгеброй, производная Ли, трансверсальное расслоение второго порядка.

Пусть $(M,\mathscr{F})$ — гладкое многообразие размерности $n+m$ со слоением коразмерности n, а $\mathbb{D}^2$ — алгебра срезанных многочленов степени два одного переменного или алгебра плюральных чисел [1] $a+b\varepsilon+c\varepsilon^2$, операция умножения в которой определяется соотношением $\varepsilon^3=0$. Трансверсальное расслоение второго порядка $T^2_{tr}M$ многообразия $(M,\mathscr{F})$ несет на себе естественную структуру гладкого многообразия над $\mathbb{D}^2$, моделируемого модулем $(\mathbb{D}^2)^n \oplus \mathbb{R}^m$.

Со слоением $\mathscr{F}$ на многообразии M ассоциируются расслоение трансверсальных r-реперов $T^r_{tr}M$ со структурной группой G^r_n и расслоение $P^r_{fol}M$ слоеных r-реперов, образованное r-джетами ростков изоморфизмов слоений $f:(\mathbb{R}^{n+m},0)\to M$, структурная группа $G^r_{n,m}$ которого образована r-джетами ростков автоморфизмов слоения $\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^n$. Расслоение $P^r_{fol}M$ является подрасслоением в расслоении $T^r_{n,m}M$ r-джетов ростков морфизмов слоений $f:(\mathbb{R}^{n+m},0)\to M$.

Пусть, далее, $q:F\to\overline{F}$ — локально тривиальное расслоение, такое что на F задано правое действие $\beta: G^r_{n,m}\times F\to F$, согласованное с действием $\overline{\beta}: G^r_n\times\overline{F}\to\overline{F}$. Полем слоеных геометрических объектов на M типа (F,β) называем эквивариантное отображение $\lambda: P^r_{fol}M\to F$, проектирующееся в поле трансверсальных геометрических объектов $\overline{\lambda}: P^r_{tr}M\to\overline{F}$ типа $(\overline{F},\overline{\beta})$.