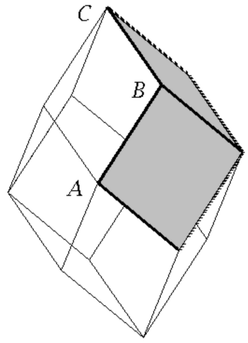

Рис. 1. Фундаментальные вершины A, B, C и фундаментальные (закрашенные) грани дважды наращенного кубооктаэдра.

Литература

1. Schlafli L. *Theorie der vielfachen Kontiuatat // Denkschriften der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft* – М.: Мир, 1901. -Т. 17- С. 1-237 с.

2. Мазуров В. Д., Хухро Е. И. *Нерешенные вопросы теории групп Коуровская тетрадь* // Институт математики СО РАН. – 2014. Новосибирск.

3. Тимофеенко И. А. *Порождающие мультиплеты инволюций линейных групп над кольцом целых чисел* // Дисс. … канд. физ.-мат. наук. – Красноярск Сибирский федеральный университет, 2017. – 108 с, Режим доступа: http://research.sfu-kras.ru/sites/research.sfu-kras.ru/files/Dissertaciya_Timofeenko.pdf

ON THE APPLICATION OF INVOLUTIONS GENERATING THE GROUP OF SYMMETRIES

I.A. Timofeenko

Three generating involution of group $SL_6(\mathbb{Z})$ are explicity indicated. The application of computer algebra systems for the synthesis of polyhedra are specified and describes.

Keywords: Involutions, group of symmetries, computer algebra system, polyhedron.

УДК 514.1

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА СЕРПИНСКОГО НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

П.И. Трошин[1]

1 *paul.troshin@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Построено семейство аналогов треугольника Серпинского на плоскости Лобачевского при помощи системы итерированных функций, связанной с группой изометрий. Найдена зависимость между параметрами полученного семейства, при которой аттрактор гомеоморфен классическому треугольнику Серпинского.

Ключевые слова: Треугольник Серпинского, плоскость Лобачевского, модель Бельтрами–Клейна, система итерированных функций.

Напомним, что треугольник Серпинского на евклидовой плоскости можно задать как аттрактор различных систем итерированных функций (СИФ, см. [1]). Приведем пример двух наиболее простых таких СИФ $\{f_i\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\}_{i=1}^3$:

$$\begin{cases} f_1(x) = 0.5x + \{-0.5\sqrt{3}, -0.5\}, \\ f_2(x) = 0.5x + \{0.5\sqrt{3}, -0.5\}, \\ f_3(x) = 0.5x + \{0, 1\}; \end{cases} \tag{1}$$

и

$$\begin{cases} f_1(x) = 0.5x, \\ f_2(x) = 0.5x + \{0.5, 0\}, \\ f_3(x) = 0.5x + \{0.25, 0.25\sqrt{3}\}. \end{cases} \tag{2}$$

В работе [1] для построения аналога треугольника Серпинского на плоскости Лобачевского в модели Бельтрами–Клейна была использована СИФ (1), «симметричная» относительно начала координат (Рис. 1). При этом остался открытым вопрос о схожей аналогии для «несимметричного» случая (2). В настоящем докладе мы отвечаем на этот вопрос.

Рис. 1. «Симметричный случай», рассмотренный в [1].

Рассмотрим модель Бельтрами–Клейна, заданную в открытом единичном круге евклидовой плоскости: $\Lambda = (B(0,1), \rho)$, $\rho(x,y) = \mathrm{Arch}\frac{1-(x,y)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$, $|x| = \sqrt{(x,x)}$.

Пусть

$$G_a\colon x \ni \Lambda \mapsto \frac{((a,x)(1-\sqrt{1-a^2}) + a^2)a + a^2\sqrt{1-a^2}x}{a^2(1+(a,x))} \in \Lambda$$

— параллельный перенос вектора x на вектор $a \neq 0$, являющийся движением в Λ ([2]). И пусть

$$\lambda\colon 0 \neq x \ni \Lambda \mapsto \frac{x}{|x|}\,\mathrm{th}\,(\lambda \mathrm{Arth}|x|) \in \Lambda$$

— действие мультипликативной группы вещественных чисел (умножение на константу по правилу $\rho(O, \lambda x) = \lambda\rho(O,x)$, $\lambda x \uparrow\uparrow x$, см. [3])

Как и в [1], основная идея — построить треугольник Серпинского как аттрактор СИФ на плоскости Лобачевского. Для этого заменим в (2) гомотетии на операцию

$\lambda(\cdot)$, а параллельный перенос — на отображение G_a. Получим СИФ $\{f_i : \Lambda \to \Lambda\}_{i=1}^{3}$:

$$\begin{cases} f_1(x) = 0.5(x), \\ f_2(x) = G_{\{0.5,0\}}(0.5(x)), \\ f_3(x) = G_{\{0.25,0.25\sqrt{3}\}}(0.5(x)). \end{cases} \tag{3}$$

Построенный таким образом аттрактор (Рис. 2) связен, но не гомеоморфен треугольнику Серпинского.

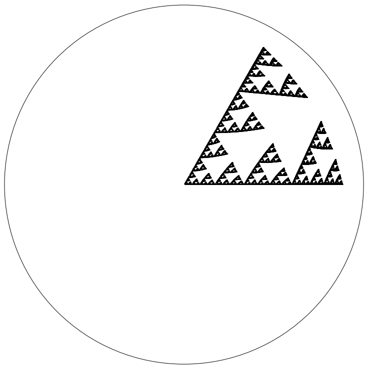

Рис. 2. Аттрактор СИФ (3).

Чтобы добиться желаемого результата, расмотрим более общую СИФ:

$$\begin{cases} f_1(x) = \lambda(x), \\ f_2(x) = G_{c\{1,0\}}(\mu(x)), \\ f_3(x) = G_{c\{\cos\phi, \sin\phi\}}(\mu(x)), \end{cases} \tag{4}$$

в которой $c \in (0,1)$, $\phi \in (0,\pi)$, $\lambda, \mu \in (0,1)$.

Предложение. *Пусть* $\mu = 1 - \lambda$ *и*

$$\lambda = \lambda(\phi, c) = \frac{Arthc}{Arth\left(\frac{c}{\sqrt{1-c^2}+\left(\sqrt{1-c^2}-1\right)\cos\phi}\right) + Arthc}.$$

Тогда аттрактор СИФ (4) *гомеоморфен аттрактору СИФ* (2) *(треугольнику Серпинского), см. Рис. 3.*

Область определения функции $\lambda(\phi, c)$ задается неравенством

$$\left|\frac{c}{\left(\sqrt{1-c^2}-1\right)\cos\phi + \sqrt{1-c^2}}\right| < 1.$$

График функции $\lambda(\phi, c)$ и ее область определения представлены на Рис. 4. Отметим, что $\lambda \in (0, 0.5)$.

Заметим также, что для построения графика удобнее пользоваться его неявным заданием:

$$\mathrm{th}\left(\frac{(\lambda-1)\mathrm{Arth}(c)}{\lambda}\right)\left(\sqrt{1-c^2} + \left(\sqrt{1-c^2}-1\right)\cos\phi\right) + c = 0.$$

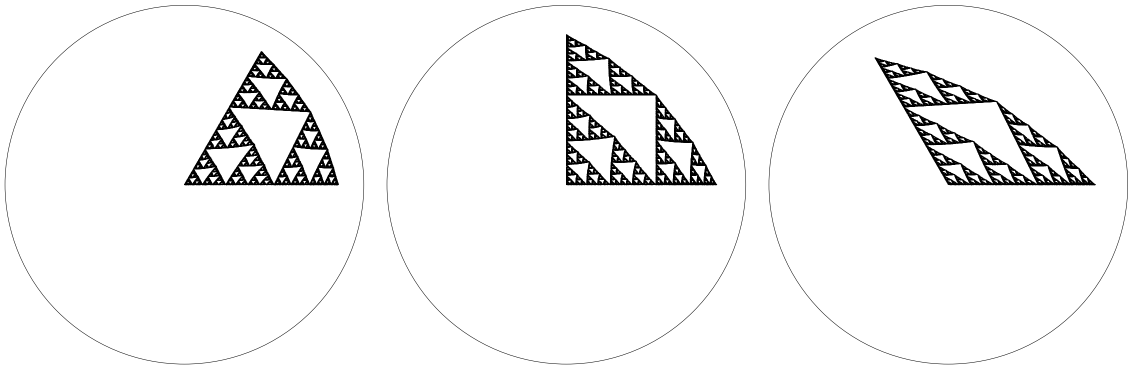

Рис. 3. Примеры аттракторов СИФ (4) при $\phi = \pi/3, \pi/2, 2\pi/3$, $c = 0.5$, $\lambda = \lambda(\phi, c)$, $\mu = 1 - \lambda$.

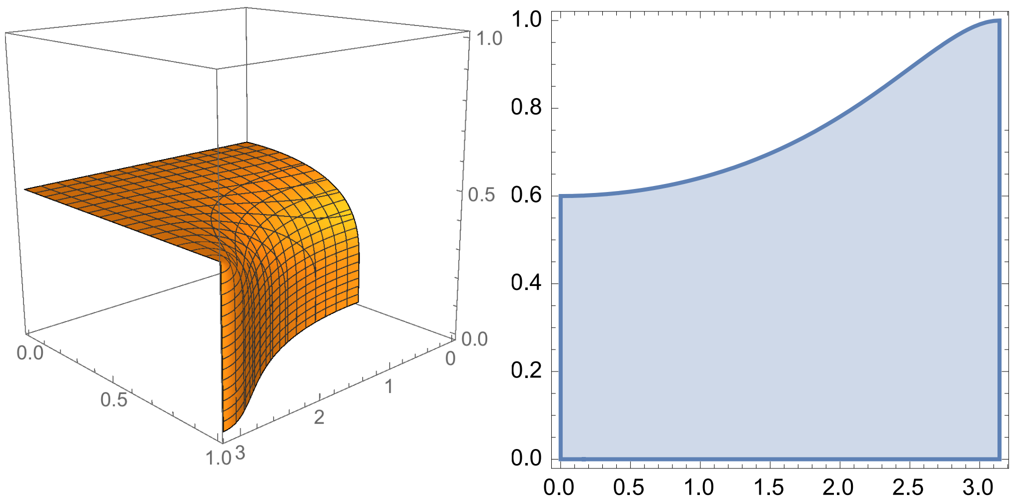

Рис. 4. График функции $\lambda(\phi, c)$ и ее область определения.

Литература

1. Barnsley M. F., Demko S. *Iterated function systems and the global construction of fractals* // Proc. R. Soc. London – 1985. – V. A399. – P. 243–275.

2. Troshin P. I. *On generalization of Sierpiński gasket in Lobachevskii plane* // Lobachevskii Journal of Mathematics – 2017. – V. 38. – № 4. – P. 751–762.

3. Sosov E. N. *Lobachevskii geometry and its application in general relativity: textbook* (Kazan Federal University, Kazan, 2016).

4. Sosov E. N. *On the action of the multiplicative group of nonzero real numbers on the pointed Lobachevsky space* // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki – 2012. – V. 154. – № 4. – P. 156–160.

ON ONE METHOD TO PRODUCE AN ANALOGUE OF SIERPIŃSKI GASKET
IN LOBACHEVSKII PLANE

P.I. Troshin

A family of analogues to Sierpiński gasket is constructed in Lobachevskii plane with the help of iterated function system connected to isometry group. We found a relationship between parameters of this

family such that attractor is homeomorphic to classical Sierpiński gasket.
Keywords: Sierpiński gasket, Lobachevskii plane, Beltrami–Klein model, iterated function system.

УДК 517.956.223

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ МЕМБРАННОЙ ТЕОРИИ ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК

Е.В. Тюриков[1]

1 *etyurikov@hotmail.com*; Донской государственный технический университет

Получен ряд результатов, относящихся к мембранной теории выпуклых оболочек с кусочно-гладкой границей её серединной поверхности. Развитие этой теории с помощью аппарата обобщённых аналитических функций требует расширенной постановки основной граничной задачи. Такая постановка даётся для оболочки с односвязной серединной поверхностью с использованием специального граничного условия Римана–Гильберта.

Ключевые слова: Выпуклая оболочка, задача Римана–Гильберта.

Вопрос о построении мембранной теории выпуклых оболочек был поставлен А. Л. Гольденвейзером [1] в середине прошлого столетия. Им же была предпринята попытка [2] математической постановки основной граничной задачи для сферической оболочки с кусочно-гладким краем (т. е. с кусочно-гладкой границей её серединной поверхности). Общий метод построения мембранной теории выпуклых оболочек с гладким краем был разработан в трудах И. Н. Векуа [3]. Дальнейшее его развитие в работах автора [4, 5] позволило получить критерий квазикорректности [6] основной граничной задачи для оболочек с кусочно-гладким краем при условии омбиличности угловых точек, а также дать расширенную постановку [7] этой задачи в общем случае при условии *концентрации напряжений* в угловых точках. В настоящей заметке даётся описание семейства куполов общего вида, для которых найдены достаточные условия квазикорректности специального варианта основной граничной задачи в геометрической форме.

Постановка задачи. Пусть S — односвязная серединная поверхность тонкой упругой оболочки V, M_j $(j = \overline{1,n})$ — угловые точки кусочно-гладкой границы $L = \bigcup\limits_{j=1}^{n} L_j$. Предполагается, что S есть внутренняя часть поверхности S_0 строго положительной гауссовой кривизны класса регулярности $W^{3,p}$, $p > 2$, а каждая из дуг L_j принадлежит классу $C^{1,\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$. Обозначим через $\boldsymbol{\nu}_j^{(k)}$ $(k = 1,2)$ векторы на поверхности S с началом в точке M_j, задающие внутренний угол величины $\nu_j\pi$ $(0 < \nu_j < \varsigma)$ в этой точке. Точку M_j назовём *выступом* [4], если $0 < \nu_j < 1$.

Определение 1. *Оболочку V назовём симметрическим куполом (S^* — куполом), если точки M_j $(j = \overline{1,n})$ — выступы, а векторы $\boldsymbol{\nu}_j^{(k)}$ $(k = 1,2)$ образуют равные углы с одним из главных направлений на поверхности S_0 в точке M_j.*

Пусть $\boldsymbol{r} = \{\alpha(s), \beta(s)\}$ — заданное вдоль L поле принадлежащего поверхности