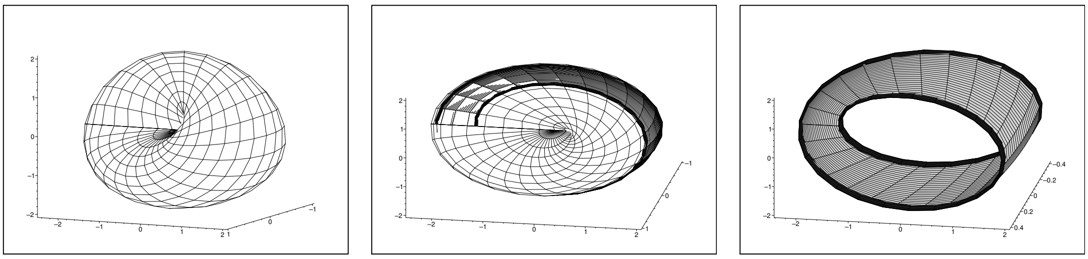

Рис. 4. Скрещенный колпак с крышкой и лист Мебиуса на нем.

Литература

1. Шуликовский В. И. *Классическая Дифференциальная геометрия.* – М.: 1963. –540 с.
2. Кривошапко С. Н., Иванов В. Н., Халаби С. М. *Аналитические поверхности.* – М.: 2006. –539 с.
3. Борисович Ю. Г., Близняков Н. М., Израилевич Я. А., Фоменко Т. Н. *Введение в топологию.* – М.: 1995. –414 с.
4. Чешкова М. А. *Односторонние поверхности.* – Барнаул: 2016. –82 с.

TORUS AND ONE-SIDED SURFACES

M.A. Cheshkova

We study the torus M which is different from the classic torus T obtained by rotating a circle along the axis. We consider the torus M as the surface of parallel transfer of one circle along the other. We define a closed curve on the torus M using 4π-periodic vector-function $\rho = \rho(v)$. Using the obtained function we define equations of the Möbius band, Klein bottle and cross-cap. We constructed the studied surfaces in Euclidean space E^3 with the help of mathematical package.

Keywords: surface of parallel transfer, torus, periodic function, Klein bottle, Möbius band, cross-cap.

УДК 514.76

НЕГОЛОНОМНОСТЬ ФАКТОР-МНОГООБРАЗИЯ ГОЛОНОМНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ПОЛУГОЛОНОМНОМ ГЛАДКОМ МНОГООБРАЗИИ

Ю.И. Шевченко[1], Е.В. Скрыдлова[2]

1 *eskrydlova@kantiana.ru*; Балтийский Федеральный университет им. И. Канта, Институт физико-математических наук и информационных технологий

2 *eskrydlova@kantiana.ru*; Балтийский Федеральный университет им. И. Канта, Институт физико-математических наук и информационных технологий

С помощью структурных уравнений Лаптева определены голономное, полуголономное, внутренне и внешне неголономные гладкие многообразия. На гладком многообразии рассмотрено голономное распределение, которое порождает фактор-многообразие. Доказано, что фактор-многообразие полуголономного многообразия является внутренне и внешне неголономным, а фактор-многообразие голономного многообразия голономно.

Ключевые слова: Голономное многообразие, полуголономное многообразие, внутренне и внешне неголономные многообразия.

1. Голономные, полуголономные и неголономные гладкие многообразия

Для n-мерного гладкого многообразия M_n структурные уравнения Г.Ф. Лаптева [1] имеют вид

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \omega^I_J \ \ (I, J, \ldots = \overline{1, n}).$$

Продолжая их, получим

$$d\omega^I_J = \omega^K_J \wedge \omega^I_K + \omega^K \wedge \omega^I_{JK},$$

причем выполняются условия

$$\omega^I_{JK} \wedge \omega^J \wedge \omega^K = 0 \Leftrightarrow \omega^I_{[JK]} = \lambda^I_{JKL}\omega^L, \ \ \lambda^I_{(JK)L} = 0, \ \ \lambda^I_{\{JKL\}} = 0,$$

где квадратные скобки обозначают альтернирование, круглые скобки — симметрирование, фигурные — циклирование.

Многообразие, для которого выполняются эти условия, назовем (ср. [2]) полуголономным гладким многообразием M^S_n. Если условия локальной симметрии вырождаются в условия симметрии $\omega^I_{[JK]} = 0$, то назовем M_n голономным гладким многообразием M^H_n. Если формы ω^I_{JK} не обладают локальной симметрией ($\omega^I_{[JK]} \neq \lambda^I_{JKL}\omega^L$), то будем говорить о внутренне неголономном гладком многообразии M^N_n. Наконец, если имеют место более общие структурные уравнения

$$d\omega^I_J = \omega^K_J \wedge \omega^I_K + \omega^K \wedge \omega^I_{JK} + \Theta^I_J, \ \ \Theta^I_J \neq \omega^K \wedge \theta^I_{JK},$$

то будем говорить о внешне неголономном гладком многообразии ${}^N M_n$.

2. Распределение на многообразии и тензор неголономности

Рассмотрим распределение $T_m(M_n)$ m-мерных подпространств T_m на гладком многообразии M_n, которое является полуголономным многообразием M^S_n, в частности, голономным многообразием M^H_n. Произведем разбиение значений индексов

$$I = (i, \alpha); \ \ i, \ldots = \overline{1, m}; \ \ \alpha, \ldots = \overline{m+1, n}.$$

Пфаффовы уравнения распределения $T_m(M_n)$ имеют вид

$$\omega^\alpha_i = \Lambda^\alpha_{iJ}\omega^J.$$

Продолжая их с помощью леммы Картана, найдем дифференциальные сравнения

$$\Delta\Lambda^\alpha_{iJ} + \omega^\alpha_{ij} \ \cong \ 0 \ (mod \ \ \omega^I),$$

где Δ - тензорный дифференциальный оператор. Из них следуют сравнения $\Delta N^\alpha_{ij} \cong 0$ для тензора неголономности $N^\alpha_{ij} = \Lambda^\alpha_{[ij]}$, который появляется при подробной записи структурных уравнений базисных форм ω^I:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j + \omega^\alpha \wedge \omega^i_\alpha, \tag{1}$$

$$d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \Omega^\alpha_\beta + N^\alpha_{ij}\omega^i \wedge \omega^j, \tag{2}$$

$$\Omega^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta - \Lambda^\alpha_{i\beta}\omega^i. \tag{3}$$

3. Фактор-многообразие, порожденное голономным распределением

При аннулировании тензора неголономности распределение называется голономным, а структурные уравнения (2) упрощаются:

$$d\omega^{\alpha} = \omega^{\beta} \wedge \Omega^{\alpha}_{\beta}. \tag{4}$$

В этом случае система $\omega^{\alpha} = 0$ вполне интегрируема и выделяет m-мерное подмногообразие $M_m \subset M_n$ со структурными уравнениями

$$d\omega^{i} = \omega^{i} \wedge \overline{\omega}^{i}_{j}, \;\; \overline{\omega}^{i}_{j} = \omega^{i}_{j}|_{\omega^{\alpha}=0}.$$

Подмногообразие M_m является типовым слоем расслоения $M_n = M_m(F_{n-m})$ со структурными уравнениями (4,1), базой которого служит $(n-m)$-мерное фактор-многообразие F_{n-m} - множество m-мерных подмногообразий, огибаемых подпространствами голономного распределения.

4. Неголономность фактор-многообразия

Выясним степень неголономности гладкого многообразия F_{n-m} со структурными уравнениями (4). Внешние дифференциалы форм (3) приводятся к виду

$$d\Omega^{\alpha}_{\beta} = \Omega^{\gamma}_{\beta} \wedge \Omega^{\alpha}_{\gamma} + \omega^{\gamma} \wedge \Omega^{\alpha}_{\beta\gamma} + N^{\alpha}_{\beta i j}\omega^{i} \wedge \omega^{j},$$

где $N^{\alpha}_{\beta i j}$ - объект внешней неголономности [3] фактор-многообразия F_{n-m}. Альтернации трехиндексных форм $\Omega^{\alpha}_{\beta\gamma}$ имеют вид

$$\Omega^{\alpha}_{[\beta\gamma]} = \lambda^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\omega^{\delta} + N^{\alpha}_{\beta\gamma i}\omega^{i},$$

где $N^{\alpha}_{\beta\gamma i}$ - объект внутренней неголономности [3] фактор-многообразия F_{n-m}.

Теорема. *Фактор-многообразие, порожденное голономным распределением $T_m(M^S_n)$ на полуголономном гладком многообразии M^S_n, является внешне и внутренне неголономным гладким многообразием ${}^{N}F^{N}_{n-m}$.*

Следствия

1) Если объекты неголономности обратятся в нуль, то фактор-многообразие будет полуголономным

$$N^{\alpha}_{\beta i j} = 0, \;\; N^{\alpha}_{\beta\gamma i} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; F_{n-m} = F^{S}_{n-m}.$$

2) Если, кроме того, условие локальной симметрии форм $\Omega^{\alpha}_{\beta\gamma}$ станет условием симметрии, то фактор-многообразие будет голономным F^{H}_{n-m}.

3) Если голономное распределение задано на голономном гладком многообразии M^{H}_{n}, то фактор-многообразие голономно

$$\lambda^{I}_{JKL} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; F_{n-m} = F^{H}_{n-m}.$$

5. Условия тензорности объектов полуголономности и неголономности

Дифференциальные сравнения для коэффициентов полуголономности и компонент объектов неголономности приводятся к виду

$$\Delta\lambda^I_{JKL} + \omega^I_{[JK]L} \cong 0,\ \Delta N^\alpha_{\beta i j} + \omega^\alpha_{[ij]\beta} \cong 0,\ \Delta N^\alpha_{\beta\gamma i} + \omega^\alpha_{[\beta\gamma]i} \cong 0.$$

В общем случае эти объекты не образуют тензоры, но при условиях их тензорности

$$\omega^I_{[JK]L} \cong 0 \Rightarrow \omega^\alpha_{[ij]\beta} \cong 0,\ \omega^\alpha_{[\beta\gamma]i} \cong 0,$$

инвариантны равенства

$$\lambda^I_{JKL} = 0 \Rightarrow N^\alpha_{\beta i j} = 0,\ N^\alpha_{\beta\gamma i} = 0,$$

фигурирующие в следствиях 1), 3).

Литература

1. Лаптев Г. Ф. *Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии* // Тр. геом. семинара. –1966. – Т.1 –М. – С. 139-189.

2. Шевченко Ю. И. *Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий* // Калининград. – 1998. – 83с.

3. Shevchenko Ju. I., Skrydlova E. V. *About non-holonomicity of quotient manifold of holonomic distribution on semi-holonomic smooth manifold* // Междунар. конф. по алгебре, анализу и геометрии. Казань. –2016. – С. 67-68.

NON-HOLONOMICITY OF QUOTIENT MANIFOLD OF HOLONOMIC DISTRIBUTION ON SEMI-HOLONOMIC SMOOTH MANIFOLD

Yu.I. Shevchenko, E.V. Skrydlova

Using the Laptev structure equations, holonomic, semi-holonomic, internally and externally non-holonomic smooth manifolds are defined. On a smooth manifold we consider a holonomic distribution that generates the factor manifold. It is proved that the factor manifold of a semi-holonomic manifold is internally and externally non-holonomic, and the factor manifold of a holonomic manifold is holonomic.

Keywords: Holonomic manifold, semi-holonomic manifold, internally and externally nonholonomic manifolds.

УДК 514.763.7

О "ШЕСТИУГОЛЬНЫХ" РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А.М. Шелехов[1]

1 *amshelekhov@rambler.ru*; Московский педагогический государственный университет

Для некоторых известных уравнений в частных производных найдены решения, которым соответствует шестиугольная три-ткань.

Ключевые слова: три-ткань, уравнение в частных производных.