**Теорема 2.** *Если* $1 \le p \le 2$ *и* $\omega^{(n)} \in \Lambda_\alpha$, *то* $F^{(n)} \in \Lambda_\alpha$.

**Теорема 3.** *Пусть* $n \ge 2$, $2/(n+1) < p < 2/n$, $\alpha = 2/p - n$ *и* $\omega^{(n)} \in \Lambda_\beta$, *где* $\beta = \alpha + \nu :$ $\nu > 0, \alpha + \nu < 1$. *Тогда* $l_\omega \in (A_p)^*$, *экстремальная функция для* $l_\omega$ *существует, может быть, неединственная. При этом* $F^{(n)} \in \Lambda_\beta$.

Соответствующие аналоги теорем 1–3 имеют место и относительно пространства Харди.

Полученные результаты являются продолжением работ [2–3] авторов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-01-00331.

**Литература**

1. Гофман К. *Банаховы пространства аналитических функций.* – М.: ИЛ, 1963. – 318 с.

2. Бурчаев Х.Х., Рябых В.Г., Рябых Г.Ю. *Об одной экстремальной задаче в пространстве Харди* $H^p$, $0 < p < \infty$ // Сиб. матем. журн. – 2017. – Т. 58. – № 3. – С. 510–525.

3. Бурчаев Х.Х., Рябых В.Г., Рябых Г.Ю. *Некоторые свойства экстремальных функций линейных функционалов над пространствами Харди и Бергмана // Итоги науки. Юг России. Исследования по математическому анализу. ЮМИ ВНЦ РАН и РСО–А. Владикавказ – 2015. – Т. 9. – С. 125–139.*

ON AN EXTREMAL PROBLEM FOR SUMMABLE ANALYTIC FUNCTIONS

H.H. Burchaev, G.Y. Ryabykh

*We study the properties of linear functionals over the Bergman and Hardy spaces formed by functions of a Lipschitz class.*

**Keywords**: Bergman spaces, extremum function.

УДК 517.444

## СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ НЕТРАДИЦИОННОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В.В. Волчков[1], Вит.В. Волчков[2]

1 *valeriyvolchkov@gmail.com*; Донецкий национальный университет
2 *volna936@gmail.com*; Донецкий национальный университет

*Рассматривается известная проблема Помпейю и некоторые ее аналоги. Обсуждается новый, современный этап в ее исследовании, основанный на применении теории трансмутационных операторов.*

**Ключевые слова**: Проблема Помпейю, трансмутационные операторы, симметрические пространства.

Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности $n$, $\mathscr{M}(n)$ – группа евклидовых движений $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{K}$ – компактное множество в $\mathbb{R}^n$ положительной лебеговой меры. Рассмотрим следующую задачу: описать класс локально суммируемых

функций $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таких, что
$$\int_{g\mathcal{K}} f(x)\,dx = 0 \tag{1}$$
для любого $g \in \mathcal{M}(n)$. Эта задача допускает различные обобщения и модификации. Например, вместо одного компакта $\mathcal{K}$ можно рассматривать семейство компактов, а вместо уравнения (1) изучать решения системы уравнений свёртки с заданными распределениями.

Первые работы по этой теме были выполнены в 1929 году и принадлежат румынскому математику Д. Помпейю, который изучал существование ненулевых функций с условием (1) для некоторых $\mathcal{K}$. Он ошибочно предполагал, что в случае, когда $\mathcal{K}$ – шар, уравнение (1) имеет только нулевое решение. Далее Ф. Джон установил, что функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ с нулевыми интегралами по всем шарам фиксированного радиуса $r$ однозначно определяется своими значениями в шаре $B_r = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < r\}$. Позже, в исследованиях Ф. Джона, Д. Дельсарта, Л. Хермандера, Л. Зальцмана, К.А. Беренстейна и др., обнаружились глубокие связи указанных вопросов со многими разделам современной математики и приложениями.

В последние годы значительное внимание уделяется локальным вариантам сформулированной задачи, то есть, когда функция $f$ задана на ограниченной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ и равенство (1) выполнено для $g \in \mathcal{M}(n)$: $g\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$. При переходе от глобальной ситуации к локальной трудности существенно возрастают. Это связано с нарушением групповой структуры, действующей на множестве решений уравнения (1). Среди первых результатов в этом направлении отметим аппроксимационную теорему Л. Хермандера для решений уравнения свертки на выпуклых областях в $\mathbb{R}^n$, а также локальную теорему о двух радиусах, полученную К.А. Беренстейном и Р. Гэем в 1986 году. Мощный аппарат для полного решения многих задач такого типа, позволивший, в частности, снять абсолютно все лишние ограничения, имеющиеся в работах предшественников, был создан в работах В.В. Волчкова в конце прошлого века. Он основан на представлении решений широкого класса уравнений свёртки в виде рядов по специальным функциям. Результаты этой методики подытожены в монографии [1], где поставлено более пятидесяти новых проблем, рассчитанных на продвижение данного направления. В частности, многообещающей программой исследований представлялось развить технику из [1] для различных классов однородных пространств с инвариантной мерой. Однако здесь возникли серьёзные препятствия (например, в случае компактных двухточечно-однородных пространств, симметрических пространств высоких рангов и группы Гейзенберга).

Ряд этих трудностей был преодолен в результате создания нового метода, разработанного авторами данной работы [2], [3]. Он основан на построении и изучении семейства трансмутационных операторов, устанавливающих гомеоморфизм между пространством однородных функций заданной степени на том или ином пространстве и пространством чётных функций на вещественной оси. В некотором обобщенном смысле эти операторы коммутируют с оператором обобщенной свёртки, что позволяет произвести редукцию ряда задач интегральной геометрии и уравнений свертки на однородном пространстве к одномерному случаю, который хорошо изучен. Отметим, что реализация указанного подхода требует развития аппарата, связанного с изучением обобщенных сферических функций и соответствующих сферических преобразований.

В данной работе мы изучаем возможность дальнейших приложений трансмутационных операторов к различным экстремальным задачам интегральной геометрии. Полученные результаты уточняют некоторые теоремы, установленные ранее в [2], [3].

## Литература

1. Volchkov V., *Integral Geometry and Convolution Equations – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.*

2. *Volchkov V., Volchkov Vit. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group – London:Springer, 2009. – 672 p.*

3. *Volchkov V., Volchkov Vit. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces – Basel: Birkhäuser, 2013. – 592 p.*

MODERN PROBLEMS OF OFFBEAT INTEGRAL GEOMETRY

V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov

*We consider the well-known Pompeiu problem and some its analogues. We discuss the new, current stage of the investigation into this old problem based on the theory of transmutation operators.*

**Keywords**: Pompeiu problem, transmutation operators, symmetric spaces.

УДК 514.75

## ТЕНЗОРНОСТЬ КРИВИЗНЫ ФУНДАМЕНТАЛЬНО-ГРУППОВОЙ СВЯЗНОСТИ, АССОЦИИРОВАННОЙ С КОНГРУЭНЦИЕЙ ГИПЕРЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

А.В. Вялова[1]

1 *vyalova.alexa@mail.ru*; Калининградский государственный технический университет

*В многомерном проективном пространстве исследуется конгруэнция гиперцентрированных плоскостей, которая является голономным гладким многообразием. Доказывается, что объект кривизны фундаментально-групповой связности в главном расслоении, ассоциированном с данной конгруэнцией, является псевдотензором.*

**Ключевые слова**: Проективное пространство, гиперцентрированная плоскость, конгруэнция, связность в главном расслоении, кривизна, псевдотензор.

В $n$-мерном проективном пространстве $P_n$ рассматривается конгруэнция [1] гиперцентрированных плоскостей $V_{n-m}$, где под гиперцентрированной плоскостью понимается $m$-мерная плоскость $P_m$ с многомерным центром – плоскостью $P_{m-1}$.

Индексы принимают следующие серии значений

$$I = 1, \dots, n; \quad I = (i, \alpha) : i, \dots = 1, \dots, m, \quad \alpha, \dots = m+1, \dots, n.$$

Введены уравнения многообразия $V_{n-m}$ в репере $R = \{A, A_i, A_\alpha\}$, где вершины $A, A_i$ помещены на плоскость $P_m$, причем $A_i$ в ее центре – гиперплоскости $P_{m-1}$.