

УДК 514.7

**ТРАНСВЕРСАЛЬНО АНАЛИТИЧЕСКИЕ ЛОРЕНЦЕВЫ СЛОЕНИЯ
КОРАЗМЕРНОСТИ ДВА СО СВЯЗНОСТЬЮ ЭРЕСМАНА НА N -МЕРНЫХ
МНОГООБРАЗИЯХ**

А.В. Багаев¹, Н.И. Жукова²

¹ *a.v.bagaev@gmail.com*; Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева

² *nina.i.zhukova@yandex.ru*; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы лоренцево слоение коразмерности два, допускающее связность Эресмана, было римановым. Дано описание структуры неримановых трансверсально аналитических лоренцевых слоений коразмерности два со связностью Эресмана.

Ключевые слова: Лоренцевы слоения, связность Эресмана, ростковая группа голономии слоя.

Исследуются лоренцевы слоения коразмерности два на гладких n -мерных многообразиях.

Напомним, что слоение (M, F) , заданное N -коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}_{i,j \in J}\}$, называется лоренцевым, если на многообразии N (возможно несвязном) задана лоренцева метрика g^N , для которой все преобразования трансверсальных координат γ_{ij} являются локальными изометриями лоренцева многообразия (N, g^N) .

В [1] дано описание структуры лоренцевых слоений коразмерности два на замкнутых трехмерных многообразиях в предположении трансверсальной полноты слоения. В отличие от [1] мы не накладываем никаких ограничений на размерность слоев слоений (M, F) , не предполагаем компактности слоеного многообразия M , а трансверсальную полноту слоений (M, F) заменяем более слабым условием существования связности Эресмана для (M, F) .

Понятие связности Эресмана для слоения введено в [1] как естественное обобщение связности в расслоении. По определению, связность Эресмана для слоения (M, F) коразмерности q есть такое q -мерное распределение \mathfrak{M} , трансверсальное слоению, для интегральных кривых которого определен перенос вдоль кривых в слоях.

В настоящее время римановы слоения образуют наиболее глубоко изученный класс среди слоений с трансверсальными геометрическими структурами. Напомним, что слоение, все слои которого компактны, называется компактным. Р.А. Воллак [3] доказал, что любое полное компактное G -слоение конечного типа является римановым. В [4] он получил аналогичный результат для полных компактных слоений, допускающих трансверсальную систему дифференциальных уравнений произвольного порядка. В [5] этот результат распространен на полные компактные картановы слоения.

В [6] получен критерий римановости конформных слоений, утверждающий, что полное конформное слоение коразмерности q , $q \geq 3$, является римановым тогда и только тогда, когда все его группы голономии относительно компактны. Этот ре-

зультат обобщен на слоения с трансверсальной параболической геометрией ранга один [8].

В [7, Теорема 5] доказано, что любое картаново слоение типа $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, где подалгебра Ли \mathfrak{h} компактно вложена в алгебру Ли \mathfrak{g} , является римановым слоением.

Нами получен следующий критерий римановости лоренцевых слоений коразмерности два.

Теорема 1. *Лоренцево слоение (M, F) коразмерности два на n -мерном многообразии, допускающее связность Эресмана, является римановым тогда и только тогда, когда группа голономии каждого его слоя конечна и либо тривиальна, либо изоморфна \mathbb{Z}_2 или $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.*

Пусть (M, F) — произвольное слоение. Подмножество многообразия M называется насыщенным, если его можно представить как объединение каких-либо слоев этого слоения.

Слой L слоения (M, F) коразмерности q называется локально стабильным в смысле Эресмана и Роба, если существует такое семейство насыщенных открытых множеств W_β , $\beta \in J$, что: 1) существует локально тривиальное расслоение $f_\beta: W_\beta \rightarrow L$, $\beta \in J$, слои которого диффеоморфны q -мерному диску D^q и трансверсальны слоям слоения (W_β, F_{W_β}) ; 2) для $\gamma \in J$ следы этих окрестностей образуют базу топологии слоя $f_\gamma^{-1}(x)$ расслоения $f_\gamma: W_\gamma \rightarrow L$ в точке $x \in L$.

Применяя методы работы [9], основанные на свойствах связности Эресмана для римановых слоений, мы доказали следующую структурную теорему.

Теорема 2. *Если лоренцево слоение (M, F) коразмерности два на n -мерном многообразии, допускающее связность Эресмана, является римановым, то реализуется одна из следующих трех возможностей:*

1) *все слои слоения замкнуты, локально устойчивы, а пространство слоев является гладким двумерным орбифолдом, нетривиальные группы орбифолдности которого изоморфны $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ или \mathbb{Z}_2 ;*

2) *замыкания слоев слоения (M, F) образуют риманово слоение (M, \bar{F}) коразмерности один, причем каждый слой слоения (M, \bar{F}) является минимальным множеством исходного слоения;*

3) *каждый слой слоения (M, F) всюду плотен в M , то есть M — минимальное множество.*

Слоение (M, F) , заданное N -коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}_{i,j \in J}\}$, называется трансверсально аналитическим, если N — вещественное аналитическое многообразие, и все преобразования трансверсальных координат γ_{ij} , $i, j \in J$, — аналитические отображения. В случае, когда N — однородное пространство G/H , а γ_{ij} — ограничения на открытые подмножества сдвигов пространства G/H элементами группы Ли G , то (M, F) называется трансверсально однородным слоением.

Следующая теорема доказана без предположения о существовании связности Эресмана для слоения (M, F) .

Теорема 3. *Пусть (M, F) — трансверсально аналитическое лоренцево слоение коразмерности два, не являющееся римановым. Тогда его трансверсальная гауссова кривизна постоянна и (M, F) является трансверсально однородным слоением.*

Нами доказана следующая структурная теорема.

Теорема 4. Пусть (M, F) — трансверсально аналитическое нериманово лоренцево слоение коразмерности два со связностью Эресмана \mathfrak{M} . Тогда:

- 1) существует регулярное накрывающее отображение $k: \widetilde{M} \rightarrow M$, где $\widetilde{M} = L_0 \times B$, B — лоренцево многообразие постоянной гауссовой кривизны, диффеоморфное плоскости \mathbb{R}^2 , L_0 — многообразиие, диффеоморфное любому слою без голономии, а индуцированное слоение $\widetilde{F} = k^*F = \{L_0 \times \{z\} \mid z \in B\}$ образовано слоями проекции $r: \widetilde{M} = L_0 \times B \rightarrow B$;
- 2) существует гомоморфизм $\chi: \pi_1(M) \rightarrow Iso(B)$ фундаментальной группы $\pi_1(M)$ в группу изометрий $Iso(B)$ лоренцева многообразия B , причем группа $\Psi := \chi(\pi_1(M))$ изоморфна группе накрывающих преобразований регулярного накрытия $k: \widetilde{M} \rightarrow M$;
- 3) ростковая группа голономии произвольного слоя $L = L(x)$, $x \in M$, слоения (M, F) изоморфна как стационарной подгруппе Ψ_b группы Ψ в точке $b \in r(k^{-1}(x)) \subset B$, так и группе \mathfrak{M} -голономии $H_{\mathfrak{M}}(L, x)$ этого слоя.

Группа Ψ , удовлетворяющая Теореме 4, называется глобальной группой голономии слоения (M, F) . Подчеркнем, что трансверсальные топологические свойства слоения (M, F) определяются свойствами его глобальной группы голономии. В частности, слоение (M, F) имеет замкнутый слой тогда, и только тогда, когда его глобальная группа голономии Ψ имеет замкнутую орбиту в многообразии B .

Построен пример трансверсально аналитического нериманова лоренцева слоения (M, F) коразмерности два на четырехмерном компактном многообразии M , являющегося хаотическим: это слоение имеет всюду плотный слой, а также всюду плотное множество компактных слоев. При этом группа голономии каждого компактного слоя изоморфна \mathbb{Z} .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00312-а) и Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ (проект № 90) в 2017.

Литература

1. Boubel C., Mounoud P., Tarquini C. *Lorentzian foliations on 3-manifolds* // Ergodic Theory Dynam. System 2006. – V. 26. – N. 5. – P. 1339–1362
2. Blumenthal R.A., Hebda J.J. *Ehresmann connections for foliations* // Indiana Univ. Math. J. – 1984. – V. 33. – N. 4. – P. 597–611.
3. Wolak R.A. *Leaves of foliations with transverse G-structures of finite type* // Publications Mathematiques. – 1989. – V. 33. – P. 153–162.
4. Wolak R.A. *Foliations admitting transverse systems of differential equations* // Compositio Math. – 1988. – V. 67. – P. 89–101.
5. Жукова Н.И. *График слоения со связностью Эресмана и стабильность слоев* // Изв. вузов. Математ. – 1994. – № 2. – P. 79–81.
6. Жукова Н.И. *Аттракторы и аналог гипотезы Лихнеровича для конформных слоений* // Сиб. матем. журн. – 2011. – Т. 52. – № 3. – С. 555–574.

7. Жукова Н.И. Минимальные множества картановых слоений // Тр. матем. инст. им. В. А. Стеклова. – 2007. – Т. 256. – С. 115–147.
8. Жукова Н.И. Аттракторы слоений с трансверсальной параболической геометрией ранга один // Матем. заметки. – 2013. – Т. 93. – № 6. – С. 944–946.
9. Zhukova N. On the stability of leaves of Riemannian foliation // Ann. Global Anal. and Geom. – 1987. – V. 5. – N. 3. – P. 261–271.

TRANSVERSELY ANALYTICAL LORENTZIAN FOLIATIONS OF CODIMENSION TWO WITH
EHRESMANN CONNECTION ON N -DIMENSIONAL MANIFOLDS

A.V. Bagaev, N.I. Zhukova

We prove a criterion for Lorentzian foliations of codimension two with Ehresmann connection to be Riemannian. A description of the structure of transverse analytic non-Riemannian Lorentzian foliations of codimension two is given.

Keywords: Lorentzian foliation, Ehresmann connection, the germ holonomy group of a leaf.

УДК 514.76

**О ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ С МАЛЫМИ
ТИПОВЫМИ ЧИСЛАМИ В АК-МНОГООБРАЗИЯХ**

М.Б. Банару¹

¹ mihail.banaru@yahoo.com; Смоленский государственный университет

Доказано, что в АК-многообразии почти контактные метрические структуры на гиперповерхности с типовым числом 1 и на гиперповерхности с типовым числом 0 являются идентичными.

Ключевые слова: Почти контактная метрическая структура, типовое число, гиперповерхность, АК-многообразие.

1. Почти эрмитовы и почти контактные метрические структуры относятся к числу важнейших дифференциальногеометрических структур. Давно известно о такой связи между ними: на всякой ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия индуцируется почти контактная метрическая структура. Изучением почти контактных метрических структур на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий занимались многие известные геометры: Д. Блэр (США), С. Ишихара, М. Окумура, С. Сасаки, С. Танно, Й. Таширо, К. Яно (Япония), В.Ф. Кириченко, Л.В. Степанова (Россия).

Как известно [1], почти эрмитовой (almost Hermitian, AH-) структурой на четномерном многообразии M^{2n} называется пара $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$, где J — почти комплексная структура, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика на этом многообразии. При этом J и $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ должны быть согласованы условием

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M^{2n}).$$

Здесь $\mathfrak{X}(M^{2n})$ — модуль гладких (класса C^∞) векторных полей на многообразии M^{2n} . Многообразие с фиксированной на нем почти эрмитовой структурой называется